【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材②

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は主に

数学Ｋ「データの分析」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

1

次のデータは，6 人で行ったあるゲームの得点である。ただし，a の値は正の整数である。

138，79，123，185，151，a　(単位は点)

(1)　中央値は a の値によってどのように変わるか調べよ。

(2)　a の値がわからないとき，このデータの中央値として，何通りの値がありうるか。

2

次のデータは，A 班 10 人と B 班 9 人の 7 日間の勉強時間の合計を調べたものである。

A 班　5，15，17，11，18，22，12，9，14，4

B 班　2，16，13，19，6，3，10，8，7　　(単位は時間)

(1)　それぞれのデータの範囲を求め，それに基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ。

(2)　それぞれのデータの第 1 四分位数 Q_1，第 2 四分位数 Q_2，第 3 四分位数 Q_3 を求めよ。

(3)　それぞれのデータの四分位範囲，四分位偏差を求めよ。また，四分位範囲に基づいて，データの散らばりの度合いを比較せよ。

3

右の図は，ある学校で行った 4 種類のテスト A，B，C，D についての，200 人の得点を箱ひげ図に表したものである。なお，どのテストも 100 点満点である。

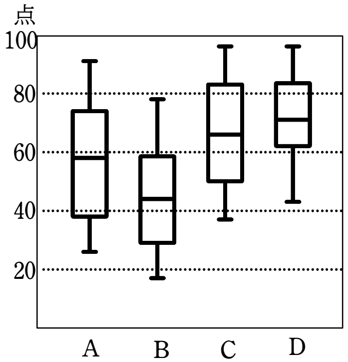
(1)　150 人以上が 60 点以上とれたテストはどれか。

(2)　40 点未満の生徒が 50 人以上のテストはどれか。

(3)　テスト C では， 40 点以上とれた生徒は多くて何人いると考えられるか。

(4)　100 人以上の生徒が 60 点未満のテストはどれか。

(5)　テスト B では，40 点以上 60 点未満の点数の生徒は何人以上いるか。



4

大豆を 1 粒ずつ箸でつかみ 30 秒間で隣の器へ移す個数を競う大会が行われた。

以下のデータは，A ～ J の 10 選手が，30 秒間で隣の器へ移した大豆の個数 x (個) である。

ただし，x のデータの平均値を $\overline{x}$ で表し，$x<25$ とする。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x	22	21	16	a	13	15	24	b	12	14
$(x-\overline{x})^2$	16	9	4	c	25	9	d	4	36	16

(1)　$\overline{x}$ の値を求めよ。　　(2)　a，b，c，d の値を求めよ。

(3)　x の分散と標準偏差を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

5

15 個の値からなるデータがあり，そのうちの 10 個の値の平均値は 9，分散は 3，残り 5 個の値の平均値は 6，分散は 9 である。この 15 個のデータの平均値と分散を求めよ。

6

(1)　次の変量 x のデータについて，次の問いに答えよ。

844，893，872，844，830，865　(単位は点)

（ア）　仮平均 x_0 を 830 として，変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

（イ）　$u=\dfrac{x-830}{7}$ とおくことにより，変量 x のデータの標準偏差，分散を求めよ。

(2)　変量 x の平均を $\overline{x}$，標準偏差を s_x とする。$z=\dfrac{x-\overline{x}}{s_x}$ とおいて得られる新しい変量 z の平均 $\overline{z}$ と標準偏差 s_z を求めよ。

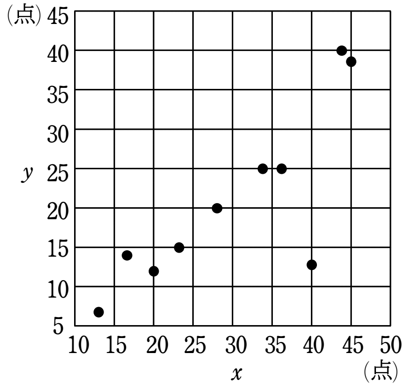
7

10 人の生徒について行った 50 点満点の漢字の「読み」と「書き取り」のテストの得点を，それぞれ変量 x，変量 y とする。右の図は，変量 x と変量 y の散布図である。

10 人の変量 x のデータは，次の通りであった。

13，17，20，23，28，34，36，40，44，45

(単位は点)



(1)　変量 x のデータの平均値と中央値を求めよ。

(2)　変量 x の値が 40 点，変量 y の値が 13 点となっている生徒の変量 y の値は誤りであることがわかり，正しい値である 32 点に修正した。修正前，修正後の変量 y のデータの中央値をそれぞれ求めよ。

(3)　(2) のとき，修正前の x と y の相関係数を r_1，修正後の x と y の相関係数を r_2 とする。値の組 $(r_1,\ r_2)$ として正しいものを次の ①～④ から選べ。

①　(0.82，0.98)　　②　(0.98，0.82)

③　(−0.82，−0.98)　　④　(−0.98，−0.82)

8

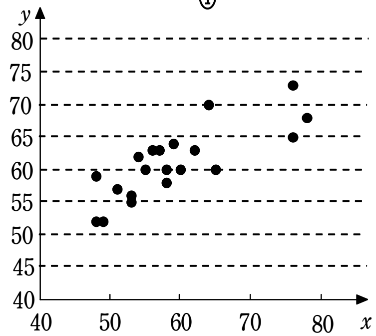
次の表は，P 高校のあるクラス 20 人について，数学と国語のテストの得点をまとめたものである。数学の得点を変量 x，国語の得点を変量 y で表し，x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ で表す。ただし，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

生徒番号	x	y	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$	$y-\overline{y}$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	62	63	3.0	9.0	2.0	4.0	6.0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	57	63	−2.0	4.0	2.0	4.0	−4.0
合　計	A	1220	0.0	1544.0	0.0	516.0	−748.0
平　均	B	61.0	0.0	77.2	0.0	25.8	−37.4
中央値	57.5	62.0	−1.5	30.5	1.0	9.0	−14.0

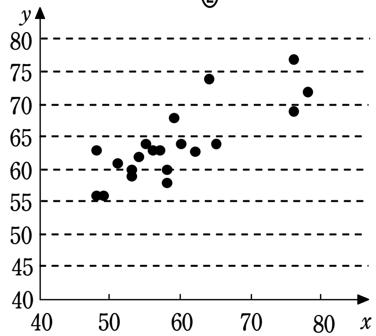
(1)　A と B の値を求めよ。

(2)　変量 x と変量 y の散布図として適切なものを，相関関係，中央値に注意して次の ① ～ ④ のうちから 1 つ選べ。

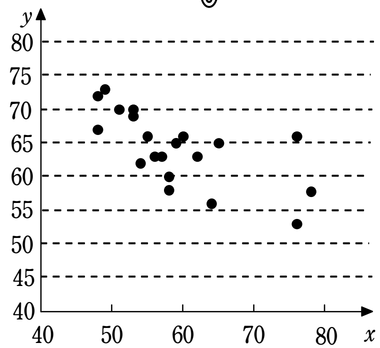
①



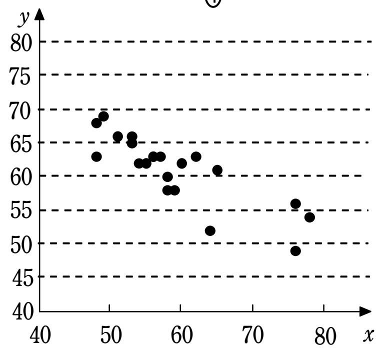
②



③



④



$\boxed{9}$

1 枚のコインを 8 回投げたところ，裏が 7 回出た。この結果から，このコインは裏が出やすいと判断してよいか。仮説検定の考え方を用い，基準となる確率を 0.05 として考察せよ。

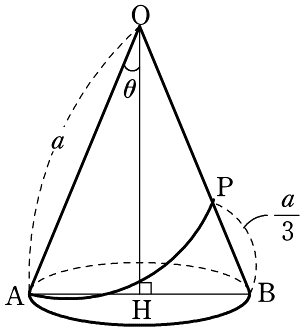
$\boxed{10}$

右の図の直円錐で，H は円の中心，線分 AB は直径，

OH は円に垂直で，$OA = a$，$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ とする。

点 P が母線 OB 上にあり，$PB = \dfrac{a}{3}$ とするとき，

点 A からこの直円錐の側面を通って点 P に至る最短経路の長さを求めよ。



$\boxed{11}$

$PA = PB = PC = 3$，$AB = 2$，$BC = 3$，$CA = \sqrt{7}$ である三角錐 PABC がある。頂点 P から底面 ABC へ下ろした垂線と底面 ABC との交点を H とする。次の値を求めよ。

(1)　AH の長さ　　(2)　PH の長さ

(3)　△ABC の面積　　(4)　三角錐 PABC の体積

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $a \leqq 123$ のとき 130.5，$124 \leqq a \leqq 150$ のとき $\dfrac{a+138}{2}$，$a \geqq 151$ のとき 144.5

(2) 29 通り

$\boxed{2}$

解答 (1) A 班：18 時間，B 班：17 時間，A 班の方が散らばりの度合いが大きい

(2) A 班のデータの Q_1 は 9 時間，Q_2 は 13 時間，Q_3 は 17 時間

B 班のデータの Q_1 は 4.5 時間，Q_2 は 8 時間，Q_3 は 14.5 時間

(3) A 班のデータの四分位範囲は 8 時間，四分位偏差は 4 時間

B 班のデータの四分位範囲は 10 時間，四分位偏差は 5 時間

B 班の方が散らばりの度合いが大きい

$\boxed{3}$

解答 (1) テスト D (2) テスト A とテスト B (3) 199 人

(4) テスト A とテスト B (5) 50 人以上

$\boxed{4}$

解答 (1) $\overline{x}=18$ (2) $a=23$，$b=20$，$c=25$，$d=36$

(3) 分散 18，標準偏差 4.2 個

$\boxed{5}$

解答 平均値 8，分散 7

$\boxed{6}$

解答 (1) (ア) $\overline{x}=858$ (点) (イ) 標準偏差 21 点，分散 441

(2) $\overline{z}=0$，$s_z=1$

$\boxed{7}$

解答 (1) 平均値 30 点，中央値 31 点 (2) 修正前 17.5 点，修正後 22.5 点

(3) ①

$\boxed{8}$

解答 (1) $A=1180$，$B=59.0$ (2) ④

$\boxed{9}$

解答 このコインは裏が出やすいと判断してよい

$\boxed{10}$

解答 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}a$

$\boxed{11}$

解答 (1) $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$ (2) $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ (3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (4) $\sqrt{5}$

$\boxed{1}$

解説

データの大きさが 6 であるから，中央値は，小さい方から 3 番目と 4 番目の値の平均値である。

a 以外の値を小さい順に並べると 79，123，138，151，185

(1) [1] $a \leqq 123$ のとき

小さい方から 3 番目の値が 123，4 番目の値が 138 となる。

この場合の中央値は $\dfrac{123+138}{2}=130.5$

[2] $124 \leqq a \leqq 150$ のとき

a と 138 が小さい方から 3 番目，4 番目の値となる。

この場合の中央値は $\dfrac{a+138}{2}$

[3] $a \geqq 151$ のとき

小さい方から 3 番目の値が 138，4 番目の値が 151 となる。

この場合の中央値は $\dfrac{138+151}{2}=144.5$

(2) $124 \leqq a \leqq 150$ のとき，a のとりうる値は $150-124+1=27$ (通り)

$a \leqq 123$，$a \geqq 151$ の場合と合わせて $27+2=29$ (通り)

参考 (2) (1) の結果は，$\dfrac{x+138}{2}$ (x は整数，$123 \leqq x \leqq 151$) とまとめることができる。

よって，中央値は $151-123+1=29$ (通り) の値がありうる，と答えてもよい。

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　A 班のデータの範囲は　$22-4=18$ (時間)

B 班のデータの範囲は　　$19-2=17$ (時間)

A 班の方が範囲が大きいから，A 班の方が散らばりの度合いが大きいと考えられる。

(2)　A 班のデータを小さい順に並べ替えると

4，5，9，11，12，14，15，17，18，22

よって

$$Q_2=\frac{12+14}{2}=13\ (時間),\ Q_1=9\ (時間),\ Q_3=17\ (時間)$$

B 班のデータを小さい順に並べ替えると

2，3，6，7，8，10，13，16，19

ゆえに

$$Q_2=8\ (時間),\ Q_1=\frac{3+6}{2}=4.5\ (時間),\ Q_3=\frac{13+16}{2}=14.5\ (時間)$$

(3)　A 班のデータの四分位範囲は $Q_3-Q_1=8$ (時間)，四分位偏差は　$\frac{8}{2}=4$ (時間)

B 班のデータの四分位範囲は $Q_3-Q_1=10$ (時間)，四分位偏差は　$\frac{10}{2}=5$ (時間)

B 班の方が四分位範囲が大きいから，B 班の方が散らばりの度合いが大きいと考えられる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　第 1 四分位数が 60 点以上のテストは D だけである。

よって　　テスト D

(2)　第 1 四分位数が 40 点未満のテストは，A と B だけである。

よって　　テスト A とテスト B

(3)　テスト C では，最小値が 40 点未満，第 1 四分位数が 40 点以上であるから，40 点以上とれた生徒は最も多くて，199 人いると考えられる。

よって　　199 人

(4)　中央値が 60 点未満のテストは，A と B だけである。

よって　　テスト A とテスト B

(5)　テスト B では，第 2 四分位数 (中央値) が 40 点以上で第 3 四分位数が 60 点未満であるから，40 点以上 60 点未満の中に少なくとも全体の $\frac{1}{4}$ はいることになる。

よって　　50 人以上

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　A のデータに着目すると

$x=22$，$(x-\overline{x})^2=16$ から　　$(22-\overline{x})^2=16$

よって　　$22-\overline{x}=\pm 4$

ゆえに　　$\overline{x}=18,\ 26$　……①

B のデータに着目すると

$x=21$，$(x-\overline{x})^2=9$ から　　$(21-\overline{x})^2=9$

よって　　$21-\overline{x}=\pm 3$

ゆえに　　$\overline{x}=18,\ 24$　……②

①，② から　　$\overline{x}=18$ (個)

別解　① と $x<25$ から　　$\overline{x}=18$ (個)

(2)　G のデータに着目すると　　$d=(24-18)^2=36$

x のデータの総和は　　$18\times 10=180$

よって　　$22+21+16+a+13+15+24+b+12+14=180$

ゆえに　　$a=43-b$　……③

H のデータに着目すると

$(b-18)^2=4$ から　　$b-18=\pm 2$

よって　　$b=16,\ 20$

$b=16$ のとき，③ から $a=27$ となり，$x<25$ に適さない。

$b=20$ のとき，③ から $a=23$ となり，$x<25$ に適する。

よって　　$a=23,\ b=20$

ゆえに　　$c=(23-18)^2=25$

したがって　　$a=23,\ b=20,\ c=25,\ d=36$

(3)　偏差の 2 乗の和は

$16+9+4+25+25+9+36+4+36+16=180$

よって，分散は　$\frac{1}{10}\times 180=18$

ゆえに，標準偏差は　$\sqrt{18}=3\sqrt{2}\fallingdotseq 4.2$（個）

$\boxed{5}$

解説

15 個のデータの平均値は　$\frac{1}{15}(9\times 10+6\times 5)=\frac{120}{15}=8$

10 個の値の 2 乗の平均値を a とすると

$a-9^2=3$　　よって　$a=84$

残りの 5 個の値の 2 乗の平均値を b とすると

$b-6^2=9$　　よって　$b=45$

よって，15 個の値の 2 乗の和は

$a\times 10+b\times 5=84\times 10+45\times 5=1065$

したがって，15 個のデータの分散は　$\frac{1065}{15}-8^2=71-64=7$

$\boxed{6}$

解説

(1)　(ア)　変量 x のデータの各値と仮平均 $x_0=830$ との差を表にすると，右のようになる。

x	844	893	872	844	830	865	計
$x-x_0$	14	63	42	14	0	35	y

$x-x_0$ の合計 y の値は

$y=14+63+42+14+0+35=168$（点）

よって　$\overline{x}=830+\frac{168}{6}=858$（点）

(イ)　$u=\frac{x-830}{7}$ とおくと，u，u^2 の値は右のようになる。

x	844	893	872	844	830	865	計
u	2	9	6	2	0	5	24
u^2	4	81	36	4	0	25	150

u のデータの分散は

$\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\frac{150}{6}-\left(\frac{24}{6}\right)^2=9$

であるから，u のデータの標準偏差は　$\sqrt{9}=3$

よって，x のデータの標準偏差は　$3\times 7=21$（点），分散は　$21^2=441$

(2)　$z=\frac{1}{s_x}x-\frac{\overline{x}}{s_x}$ から　$\overline{z}=\frac{\overline{x}-\overline{x}}{s_x}=0$，$s_z=\left|\frac{1}{s_x}\right|s_x=1$

$\boxed{7}$

解説

(1)　変量 x のデータの平均値は

$\frac{1}{10}(13+17+20+23+28+34+36+40+44+45)=\frac{300}{10}=30$（点）

変量 x のデータの中央値は　$\frac{1}{2}(28+34)=31$（点）

(2)　修正前の変量 y のデータの小さい方から 5，6 番目の値が，それぞれ 15，20 であるから，中央値は　$\frac{1}{2}(15+20)=17.5$（点）

修正後の変量 y のデータの小さい方から 5，6 番目の値が，それぞれ 20，25 であるから，中央値は　$\frac{1}{2}(20+25)=22.5$（点）

(3)　修正前，修正後とも，散布図から正の相関関係があることがわかる。

よって　$r_1>0$，$r_2>0$

また，修正後の方が，散布図が右上がりの直線に沿って分布する傾向がより強くなる。

よって　$r_1<r_2$

これらを満たす $(r_1,\ r_2)$ の組は　①

$\boxed{8}$

解説

(1)　生徒番号 1 の生徒について，表から

$x=62,\quad x-\overline{x}=3.0$

よって　$62-\overline{x}=3.0$　　ゆえに　$B=59.0$

よって　$A=59.0\times 20=1180$

(2)　表から，相関係数 r は　$r=\dfrac{-37.4}{\sqrt{77.2\times 25.8}}<0$

ゆえに，散布図の点は右下がりに分布するから，③，④ のどちらかである。

このうち，x の中央値が 57.5 で，y の中央値が 62.0 のものは　④

$\boxed{9}$

(解説)

仮説 H_1 : このコインは裏が出やすい

と判断してよいかを考察するために，次の仮説を立てる。

仮説 H_0 : このコインは公正である

仮説 H_0 のもとで，コインを 8 回投げて，裏が 7 回以上出る確率は

$${}_8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^0+{}_8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2^8}(1+8)=\frac{9}{256}=0.035\cdots\cdots$$

これは 0.05 より小さいから，仮説 H_0 は正しくなかったと考えられ，仮説 H_1 は正しいと判断してよい。

したがって，このコインは裏が出やすいと判断してよい。

$\boxed{10}$

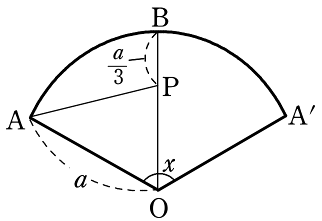
(解説)

$AB=2r$ とすると，$\triangle OAH$ で，$AH=r$,

$\angle OHA=90^\circ$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ であるから　$\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3}$

側面を直線 OA で切り開いた展開図は，図のような，中心 O，半径 $OA=a$ の扇形である。

中心角を x とすると，図の弧 ABA' の長さについて



$$2\pi a\cdot\frac{x}{360^\circ}=2\pi r$$

$\dfrac{r}{a}=\dfrac{1}{3}$ であるから　$x=360^\circ\cdot\dfrac{r}{a}=360^\circ\cdot\dfrac{1}{3}=120^\circ$

ここで，求める最短経路の長さは，図の線分 AP の長さであるから，$\triangle OAP$ において，余弦定理により

$$AP^2=OA^2+OP^2-2OA\cdot OP\cos 60^\circ=a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2a\cdot\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{9}a^2$$

$AP>0$ であるから，求める最短経路の長さは　$\dfrac{\sqrt{7}}{3}a$

$\boxed{11}$

(解説)

$PA=PB=PC$ であるから，P から下ろした垂線と底面 ABC との交点 H は　$\triangle ABC$ の外接円の中心である。

(1)　$\angle ABC=\theta$ とおく。

$\triangle ABC$ において　余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{2^2+3^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　正弦定理により

$$AH=\frac{\sqrt{7}}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{7}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

(2)　$PH^2=PA^2-AH^2=3^2-\left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\dfrac{20}{3}$

$PH>0$ であるから　$PH=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

(3)　(1) から　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)　三角錐 PABC の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle ABC\times PH$ であるから

(2)，(3) より　$V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{15}}{3}=\sqrt{5}$