1

解説

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)'\log(1+x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2 + \int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，$x=\tan\theta$ とおくと　　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$1 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$

したがって　　$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$

2

解説

(1)　$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$　から　　$\dfrac{dx}{dt}=-2t$，$\dfrac{dy}{dt}=1-3t^2$

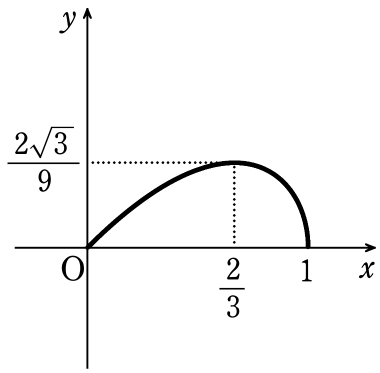
$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　　$t=0$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　　$3t^2=1$　　　よって　　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，t の値に対応する x，y の値の変化は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
x	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

よって，曲線 C の概形は右の図のようになる。



(2)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ における x を x_1，$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq 1$ における x を x_2 とすると，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} {x_1}^2 dy-\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}} {x_2}^2 dy$$

ここで　　$dy=(1-3t^2)dt$

また，(1) の x，y の値の変化の表から

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-t^2)^2(1-3t^2)dt-\pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1-t^2)^2(1-3t^2)dt \\ &=\pi\int_0^1(1-t^2)^2(1-3t^2)dt=\pi\int_0^1(1-5t^2+7t^4-3t^6)dt \\ &=\pi\left[t-\frac{5}{3}t^3+\frac{7}{5}t^5-\frac{3}{7}t^7\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi \end{aligned}$$

参考　$0 \leqq a < b$，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_0 は

$$V_0=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

で与えられる。このことを用いると，求める体積は

$$\begin{aligned} 2\pi\int_0^1 xydx&=2\pi\int_1^0(1-t^2)(t-t^3)(-2t)dt \\ &=4\pi\int_0^1(t^6-2t^4+t^2)dt=4\pi\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi \end{aligned}$$

3

解説

(1)　$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

△APB において，余弦定理により　　$\cos\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}$

ここで　　$$\begin{aligned} \mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2&=\{(x-1)^2+y^2\}+\{(x+1)^2+y^2\}-2^2 \\ &=x^2-2x+1+y^2+x^2+2x+1+y^2-4 \\ &=2x^2+2y^2-2 \end{aligned}$$

一方　　$$\begin{aligned} 2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}&=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ &=2\sqrt{\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}} \\ &=2\sqrt{(x-1)^2(x+1)^2+y^2\{(x-1)^2+(x+1)^2\}+y^4} \\ &=2\sqrt{\{(x-1)(x+1)\}^2+y^2(2x^2+2)+y^4} \\ &=2\sqrt{(x^2-1)^2+2y^2(x^2+1)+y^4} \end{aligned}$$

したがって　　$\cos\angle\mathrm{APB}=\dfrac{x^2+y^2-1}{\sqrt{(x^2-1)^2+2y^2(x^2+1)+y^4}}$

$t=x^2-1$ とおくと　　$\cos\angle\mathrm{APB}=\dfrac{t+y^2}{\sqrt{t^2+2y^2(t+2)+y^4}}$

$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ または 135° であるから

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{t+y^2}{\sqrt{t^2+2y^2(t+2)+y^4}}$$

両辺を 2 乗しても同値であるから　　$\dfrac{1}{2}=\dfrac{(t+y^2)^2}{t^2+2y^2(t+2)+y^4}$

整理すると　　$t^2+2ty^2+y^4-4y^2=0$

また，点 P は点 A，B と異なる点であるから　　$(x,\ y)\fallingdotseq(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

よって　　$(t,\ y)\fallingdotseq(0,\ 0)$

以上より　　$t^2+2ty^2+y^4-4y^2=0$ かつ $(t,\ y)\fallingdotseq(0,\ 0)$

(2)　$t^2+2ty^2+y^4-4y^2=0$ より

$$(t^2+2ty^2+y^4)-4y^2=0$$

$$(t+y^2)^2-(2y)^2=0$$

$$(t+y^2+2y)(t+y^2-2y)=0$$

よって　　$t+y^2+2y=0$ または $t+y^2-2y=0$

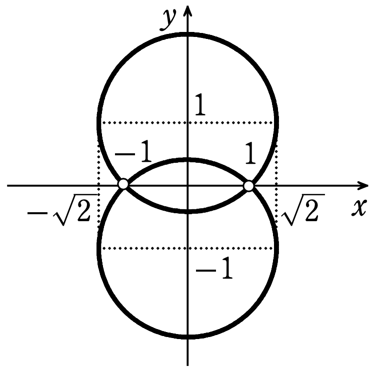
$t=x^2-1$ から

$$x^2-1+y^2+2y=0 \text{ または } x^2-1+y^2-2y=0$$

よって　　$x^2+(y+1)^2=2$ または $x^2+(y-1)^2=2$

したがって，点 P の軌跡は右の図のようになる。

ただし，点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ は含まない。



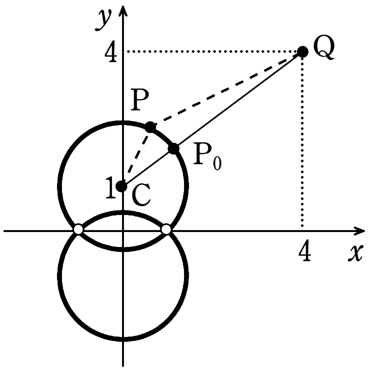
(3)　点 C$(0,\ 1)$ とする。

線分 PQ の長さが最小となるのは，右の図より，点 P が線分 CQ と円 $x^2+(y-1)^2=2$ との交点 $\mathrm{P_0}$ と一致するときである。

このとき　　$\mathrm{P_0Q}=\mathrm{CQ}-\mathrm{CP_0}$

ここで　　$\mathrm{CQ}=\sqrt{4^2+(4-1)^2}=5$，$\mathrm{CP_0}=\sqrt{2}$

よって　　$\mathrm{P_0Q}=5-\sqrt{2}$



$\boxed{4}$

(解説)

$x+y=t$ とおく。

$x^2+xy+y^2=6$ から　$(x+y)^2-xy=6$　　　よって　　$xy=t^2-6$

ゆえに，x，y は，p の 2 次方程式 $p^2-tp+t^2-6=0$ の実数解であるから，この判別式を D とすると　　$D=(-t)^2-4(t^2-6)\geqq 0$

すなわち　　$t^2-8\leqq 0$　　　よって　　$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$

また　$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)$

$$=(t^2-6)t-t^2+t=t^3-t^2-5t$$

よって，$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$ における t^3-t^2-5t のとりうる値の範囲を求めればよい。

$f(t)=t^3-t^2-5t$ とおくと　　$f'(t)=3t^2-2t-5=(t+1)(3t-5)$

$f'(t)=0$ とすると　$t=-1,\ \dfrac{5}{3}$

$-2\sqrt{2}\leqq t\leqq 2\sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで　　$f(-2\sqrt{2})=-8-6\sqrt{2}$，$f(-1)=3$，

$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{175}{27}$，$f(2\sqrt{2})=-8+6\sqrt{2}$

$-\dfrac{175}{27}=-6-\dfrac{13}{27}$ であるから　　$-8-6\sqrt{2}<-\dfrac{175}{27}$

また，$6\sqrt{2}=\sqrt{72}$ より，$-8+6\sqrt{2}<-8+9=1$ であるから　　$-8+6\sqrt{2}<3$

以上から　　$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$