

1

次の式を計算せよ。

(1) $\{(-1+2i)-(7-3i)\}^2$

(2) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

(3) $\frac{2-i}{2+i}-\frac{3+i}{3-i}$

(4) $\frac{1+3i}{3-i}\times\frac{2i+3}{5i-1}$

【解答】 (1) $39-80i$ (2) 1 (3) $-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$ (4) $\frac{17}{26}+\frac{7}{26}i$

【解説】

(1) (与式) $=(-8+5i)^2=64-80i+25i^2=39-80i$

(2) (与式) $=\frac{(-1-\sqrt{3}i)^3}{8}=\frac{-1-3\sqrt{3}i-3(\sqrt{3}i)^2-(\sqrt{3}i)^3}{8}$
 $=\frac{-1-3\sqrt{3}i+9+3\sqrt{3}i}{8}=\frac{8}{8}=1$

(3) (与式) $=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}-\frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}=\frac{4-4i+i^2}{4-i^2}-\frac{9+6i+i^2}{9-i^2}$
 $=\frac{3-4i}{5}-\frac{8+6i}{10}=\frac{3-4i}{5}-\frac{4+3i}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

(4) (与式) $=-\frac{(1+3i)(3+2i)}{(3-i)(1-5i)}=-\frac{3+2i+9i+6i^2}{3-15i-i+5i^2}=\frac{-3+11i}{2(1+8i)}$
 $=\frac{(-3+11i)(1-8i)}{2(1+8i)(1-8i)}=\frac{-3+24i+11i-88i^2}{2(1-64i^2)}=\frac{85+35i}{2\cdot 65}$
 $=\frac{17+7i}{26}=\frac{17}{26}+\frac{7}{26}i$

2

2つの虚数 α 、 β について、和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ がともに実数ならば、 α と β は互いに共役な複素数であることを示せ。

【解答】 略

【解説】

$\alpha=a+bi$ 、 $\beta=c+di$ とおく。ただし、 a 、 b 、 c 、 d は実数で $b\neq 0$ 、 $d\neq 0$ とする。

このとき $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$
 $\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$
 $=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$\alpha+\beta$ 、 $\alpha\beta$ がともに実数のとき、これらの虚部は0になるから
 $b+d=0$ ……①、 $ad+bc=0$ ……②

①から $d=-b$ ……③

③を②に代入して整理すると $b(a-c)=0$
 $b\neq 0$ であるから $a-c=0$ よって $c=a$ ……④

③、④から $\beta=a-bi$

したがって、 α と β は互いに共役な複素数である。

3

2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が $3-i$ を解にもつとき、実数の定数 a 、 b の値を求めよ。

【解答】 $a=-6$ 、 $b=10$

【解説】

$3-i$ が $x^2+ax+b=0$ の解であるから
 $(3-i)^2+a(3-i)+b=0$

よって $(9-6i-1)+a(3-i)+b=0$

整理して $(3a+b+8)-(a+6)i=0$

$3a+b+8$ 、 $-(a+6)$ は実数であるから
 $3a+b+8=0$ 、 $-(a+6)=0$

これを解いて $a=-6$ 、 $b=10$

4

2つの2次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$ 、 $x^2+(a-1)x+a^2=0$ が次の条件を満たすとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
(1) ともに虚数解をもつ。 (2) どちらか一方だけが虚数解をもつ。

【解答】 (1) $\frac{1}{3}<a<2$ (2) $a<-1$ 、 $-1<a\leq\frac{1}{3}$ 、 $2\leq a$

【解説】

$x^2+2ax+a+2=0$ ……①
 $x^2+(a-1)x+a^2=0$ ……② とする。

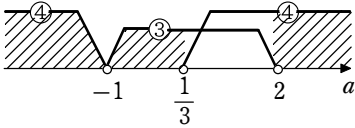
①の判別式を D_1 、②の判別式を D_2 とすると
 $\frac{D_1}{4}=a^2-1\cdot(a+2)=a^2-a-2$
 $=(a+1)(a-2)$
 $D_2=(a-1)^2-4\cdot 1\cdot a^2=-(3a^2+2a-1)$
 $=(a+1)(3a-1)$

(1) ①、②がともに虚数解をもつための必要十分条件は $D_1<0$ かつ $D_2<0$
 $D_1<0$ から $(a+1)(a-2)<0$
よって $-1<a<2$ ……③
 $D_2<0$ から $-(a+1)(3a-1)<0$
ゆえに $(a+1)(3a-1)>0$
よって $a<-1$ 、 $\frac{1}{3}<a$ ……④

③と④の共通範囲を求めて $\frac{1}{3}<a<2$

(2) ①、②のどちらか一方だけが虚数解をもつのは、③、④のどちらか一方だけが成り立つときである。
下の図から、その範囲を求めて

$$a<-1, -1<a\leq\frac{1}{3}, 2\leq a$$



5

2次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の2つの解を α 、 β ($\alpha<\beta$) とするとき、次の式の値を求めよ。
(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ (3) $\alpha-\beta$

【解答】 (1) 3 (2) 34 (3) $-\sqrt{2}$

【解説】

解と係数の関係から $\alpha+\beta=\frac{4}{2}=2$ 、 $\alpha\beta=\frac{1}{2}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot\frac{1}{2}=3$

(2) $\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$
 $=\frac{3^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{17}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{17}{2}\times 4=34$

(3) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2^2-4\cdot\frac{1}{2}=2$
 $\alpha<\beta$ より、 $\alpha-\beta<0$ であるから $\alpha-\beta=-\sqrt{2}$

6

2次方程式 $x^2+kx+24=0$ の2つの解の差が5であるとき、定数 k の値と2つの解を求めよ。

解答 $k=11$ のとき、2つの解は $-8, -3$
 $k=-11$ のとき、2つの解は $3, 8$

解説

2つの解を $\alpha, \alpha+5$ とおく。

解と係数の関係から $\alpha+(\alpha+5)=-k, \quad \alpha(\alpha+5)=24$

すなわち $2\alpha+5=-k \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha^2+5\alpha-24=0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ から $(\alpha+8)(\alpha-3)=0$ よって $\alpha=-8, 3$

$\alpha=-8$ のとき、 $\textcircled{1}$ から $k=-\{2\cdot(-8)+5\}=11$

2つの解は $-8, -3$

$\alpha=3$ のとき、 $\textcircled{1}$ から $k=-(2\cdot3+5)=-11$

2つの解は $3, 8$

7

2次方程式 $x^2+px+q=0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha-3, \beta-3$ を2つの解とする2次方程式が $x^2-2x+4=0$ であるという。定数 p, q の値を求めよ。

解答 $p=-8, q=19$

解説

$x^2+px+q=0$ の2つの解が α, β であるから

$\alpha+\beta=-p \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \alpha\beta=q \cdots \cdots \textcircled{2}$

$x^2-2x+4=0$ の2つの解が $\alpha-3, \beta-3$ であるから

$(\alpha-3)+(\beta-3)=2 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad (\alpha-3)(\beta-3)=4 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ から $\alpha+\beta=8 \cdots \cdots \textcircled{5}$

$\textcircled{1}$ を代入して $-p=8$ よって $p=-8$

$\textcircled{4}$ から $\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9=4$

$\textcircled{2}, \textcircled{5}$ を代入して $q-3\cdot8+9=4$ よって $q=19$

したがって $p=-8, q=19$

8

次の式を、(ア)有理数 (イ)実数 (ウ)複素数 の各範囲で因数分解せよ。

(1) x^4-6x^2+5 (2) $2x^4-x^2-6$ (3) x^4+4

解答 (1) (ア) $(x+1)(x-1)(x^2-5)$

(イ), (ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(2) (ア) $(2x^2+3)(x^2-2)$ (イ) $(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ウ) $2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(3) (ア), (イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

解説

(1) $x^4-6x^2+5=(x^2)^2-6x^2+5=(x^2-1)(x^2-5)=(x+1)(x-1)(x^2-5)$
 $=(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(ア) $(x+1)(x-1)(x^2-5)$

(イ), (ウ) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

(2) $2x^4-x^2-6=2(x^2)^2-x^2-6=(2x^2+3)(x^2-2)$
 $=(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$2x^2+3=0$ を解くと $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$

よって (与式) $=2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ア) $(2x^2+3)(x^2-2)$ (イ) $(2x^2+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(ウ) $2\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

(3) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$
 $=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

$x^2+2x+2=0$ を解くと $x=-1\pm i$

$x^2-2x+2=0$ を解くと $x=1\pm i$

したがって (与式) $=\{x-(-1+i)\}\{x-(-1-i)\}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$
 $=(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

(ア), (イ) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

(ウ) $(x+1-i)(x+1+i)(x-1-i)(x-1+i)$

9

2次方程式 $x^2+x-3=0$ の2つの解を α, β とするとき、次の2数を解とする2次方程式を作れ。

(1) $\alpha-2, \beta-2$ (2) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ (3) α^2, β^2

解答 (1) $x^2+5x+3=0$ (2) $x^2+4x+3=0$ (3) $x^2-7x+9=0$

解説

解と係数の関係から $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-3$

(1) $(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=-1-4=-5$

$(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-3-2\cdot(-1)+4=3$

よって、求める2次方程式の1つは $x^2+5x+3=0$

(2) $(\alpha+\beta)+\alpha\beta=(-1)+(-3)=-4$

$(\alpha+\beta)\cdot\alpha\beta=(-1)\cdot(-3)=3$

よって、求める2次方程式の1つは $x^2+4x+3=0$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-3)^2=9$

よって、求める2次方程式の1つは $x^2-7x+9=0$

10

2 次方程式 $7x^2-3x-2=0$ の 2 つの解 α , β の逆数にそれぞれ 1 を加えた数を解とする 2 次方程式を作れ。ただし, 係数は整数にせよ。

解答 $2x^2-x-8=0$

解説

解と係数の関係から $\alpha+\beta=\frac{3}{7}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{7}$

したがって $\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)+\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{3}{7}\left(-\frac{7}{2}\right)+2$
 $=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+1=-4$

よって, 求める 2 次方程式の 1 つは

$x^2-\frac{1}{2}x-4=0$ から $2x^2-x-8=0$

11

2 次方程式 $2x^2-4ax+a+3=0$ が次のような異なる 2 つの解をもつように, 定数 a の値の範囲を定めよ。

(1) ともに 1 より大きい (2) ともに 1 より小さい

(3) 1 つの解が 1 より大きく, 他の解が 1 より小さい

解答 (1) $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{3}$ (2) $a<-1$ (3) $a>\frac{5}{3}$

解説

$2x^2-4ax+a+3=0$ の 2 つの解を α , β とし, 判別式を D とする。

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=\frac{4a}{2}=2a$, $\alpha\beta=\frac{a+3}{2}$

また $\frac{D}{4}=(-2a)^2-2(a+3)=2(2a^2-a-3)$
 $=2(a+1)(2a-3)$

(1) ともに 1 より大きい異なる 2 つの解をもつための必要十分条件は

$D>0$ で, $(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

が成り立つことである。

$D>0$ より $2(a+1)(2a-3)>0$ よって $a<-1$, $\frac{3}{2}<a$ …… ①

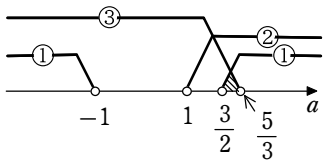
$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$ より $(\alpha+\beta)-2>0$

ゆえに $2a-2>0$ よって $a>1$ …… ②

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$ より $\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$

ゆえに $\frac{a+3}{2}-2a+1>0$ よって $a<\frac{5}{3}$ …… ③

①, ②, ③ の共通範囲を求めて $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{3}$



(2) ともに 1 より小さい異なる 2 つの解をもつための必要十分条件は

$D>0$ で, $(\alpha-1)+(\beta-1)<0$ かつ $(\alpha-1)(\beta-1)>0$

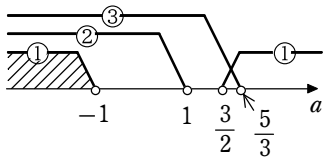
が成り立つことである。

$D>0$ より $a<-1$, $\frac{3}{2}<a$ …… ①

$(\alpha-1)+(\beta-1)<0$ より $2a-2<0$

よって $a<1$ …… ② $(\alpha-1)(\beta-1)>0$ より $a<\frac{5}{3}$ …… ③

①, ②, ③ の共通範囲を求めて $a<-1$



(3) 1 つの解が 1 より大きく, 他の解が 1 より小さいための必要十分条件は

$(\alpha-1)(\beta-1)<0$ よって $\frac{a+3}{2}-2a+1<0$

これを解いて $a>\frac{5}{3}$

12

2 次方程式 $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=0$ の 2 つの解を α , β とするとき, 次の式の値を求めよ。

$\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$

解答 0

解説

この 2 次方程式の x^2 の係数は 3 であるから, 次の等式が成り立つ。

$(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ①

① の両辺に $x=1$ を代入すると

$(-1)\cdot(-2)=3(1-\alpha)(1-\beta)$

よって $(\alpha-1)(\beta-1)=\frac{2}{3}$

① の両辺に $x=2$ を代入すると

$(-1)\cdot 1=3(2-\alpha)(2-\beta)$

よって $(\alpha-2)(\beta-2)=-\frac{1}{3}$

① の両辺に $x=3$ を代入すると

$2\cdot 1=3(3-\alpha)(3-\beta)$

よって $(\alpha-3)(\beta-3)=\frac{2}{3}$

以上から

$\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}=\frac{3}{2}-3+\frac{3}{2}=0$

13

連立方程式 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ を解け。

解答 $(x, y)=(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

解説

$\begin{cases} x+y+xy=11 & \cdots \cdots \text{①} \\ x^2y+xy^2=30 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$

② から $xy(x+y)=30$ …… ③

$x+y=u$, $xy=v$ とおくと, ①, ③ から

$u+v=11$, $uv=30$

よって, u , v は $t^2-11t+30=0$ の解である。

左辺を因数分解すると $(t-5)(t-6)=0$

ゆえに $t=5, 6$ よって $(u, v)=(5, 6), (6, 5)$

すなわち $(x+y, xy)=(5, 6), (6, 5)$

[1] $x+y=5$, $xy=6$ のとき

x , y は $t^2-5t+6=0$ の解である。

左辺を因数分解すると $(t-2)(t-3)=0$

よって $t=2, 3$

[2] $x+y=6$, $xy=5$ のとき

x , y は $t^2-6t+5=0$ の解である。

左辺を因数分解すると $(t-1)(t-5)=0$

よって $t=1, 5$

[1], [2] から

$(x, y)=(2, 3), (3, 2), (1, 5), (5, 1)$

14

$x^{100}+x^{99}+1$ を x^2-x で割ったときの余りを求めよ。

解答 $2x+1$

解説

$x^{100}+x^{99}+1$ を x^2-x で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると

$x^{100}+x^{99}+1=(x^2-x)Q(x)+ax+b$

すなわち $x^{100}+x^{99}+1=x(x-1)Q(x)+ax+b$ …… ①

① の両辺に $x=0$ を代入して $1=b$ …… ②

① の両辺に $x=1$ を代入して $1^{100}+1^{99}+1=a+b$

よって $a+b=3$ …… ③

②, ③ から $a=2$, $b=1$ したがって, 求める余りは $2x+1$

15

x についての整式 $P(x)$ は、 $(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り、 $(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする。

- (1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。
(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

【解答】 (1) $x+6$ (2) $\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}$

【解説】

$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$ とすると、等式

$P(x)=(x+1)^2Q_1(x)-x+4$ が成り立つ。

よって $P(-1)=5$ …… ①

また、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、等式

$P(x)=(x-1)^2Q_2(x)+2x+5$ が成り立つ。

よって $P(1)=7$ …… ②

- (1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの商を $Q_3(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q_3(x)+ax+b$$

ゆえに $P(-1)=-a+b$ 、 $P(1)=a+b$

①、② から $-a+b=5$ 、 $a+b=7$

これを解いて $a=1$ 、 $b=6$

したがって、求める余りは $x+6$

- (2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの商を $Q_4(x)$ 、余りを cx^2+dx+e とすると、次の等式が成り立つ。

$$P(x)=(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+cx^2+dx+e \quad \cdots \cdots \text{③}$$

ここで、 $(x+1)(x-1)^2Q_4(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるから、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは、 cx^2+dx+e を $(x-1)^2$ で割ったときの余りと等しい。

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると余りが $2x+5$ であるから、 cx^2+dx+e は

$$cx^2+dx+e=c(x-1)^2+2x+5$$

と表される。ゆえに、③ は次のように表される。

$$P(x)=(x+1)(x-1)^2Q_4(x)+c(x-1)^2+2x+5$$

よって $P(-1)=c(-1-1)^2+2\cdot(-1)+5=4c+3$

① から $4c+3=5$ ゆえに $c=\frac{1}{2}$

よって、求める余りは $\frac{1}{2}(x-1)^2+2x+5=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{11}{2}$

16

方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とするとき

- (1) $\omega^{20}+\omega^{10}$ の値を求めよ。 (2) $\frac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}$ の値を求めよ。
(3) $(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^2b)$ を簡単にせよ。

【解答】 (1) -1 (2) -2 (3) a^3-b^3

【解説】

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$(1) \quad \omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=1^6\cdot\omega^2+1^3\cdot\omega=\omega^2+\omega$$

ここで、 $\omega^2+\omega+1=0$ から $\omega^2+\omega=-1$

よって $\omega^{20}+\omega^{10}=-1$

$$(2) \quad \omega^2+\omega+1=0 \text{ から } \omega^2+1=-\omega$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \frac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1} &= \frac{\omega^3\cdot\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1} = \frac{\omega^2+3\omega+1}{\omega^2+1} = \frac{(\omega^2+1)+3\omega}{\omega^2+1} \\ &= \frac{-\omega+3\omega}{-\omega} = \frac{2\omega}{-\omega} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (\text{与式}) &= (a-b)(a^2-\omega^2ab-\omega ba+\omega^3b^2) \\ &= (a-b)\{a^2-(\omega^2+\omega)ab+\omega^3b^2\} \\ &= (a-b)\{a^2-(-1)ab+1\cdot b^2\} \\ &= (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \end{aligned}$$

【参考】 方程式 $x^3=b^3$ を変形すると $\left(\frac{x}{b}\right)^3=1$

これを解くと $\frac{x}{b}=1, \omega, \omega^2$

よって、 $x^3=b^3$ の3つの解は $b, \omega b, \omega^2b$ であり

$$x^3-b^3=(x-b)(x-\omega b)(x-\omega^2b)$$

が成り立つ。この等式に $x=a$ を代入すれば、(3)の結果が得られる。

17

4次方程式 $x^4+ax^3-x^2+ax+b=0$ が -1 と 2 を解にもつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

【解答】 $a=-1, b=-2$ 、他の解は $\pm i$

【解説】

-1 と 2 が解であるから

$$(-1)^4+a(-1)^3-(-1)^2+a(-1)+b=0$$

$$2^4+a\cdot 2^3-2^2+a\cdot 2+b=0$$

すなわち $-2a+b=0, 10a+b=-12$

これを解いて $a=-1, b=-2$

このとき、方程式は $x^4-x^3-x^2-x-2=0$

この式の左辺は $(x+1)(x-2)$ で割り切れるから、左辺を因数分解すると

$$(x+1)(x-2)(x^2+1)=0$$

したがって、他の解は $x=\pm i$

18

3次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $2+3i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

【解答】 $a=17, b=-13$ 、他の解は $1, 2-3i$

【解説】

「3次方程式の解と係数の関係」を利用して、

方程式の係数は実数であるから、 $2+3i$ と共役な複素数 $2-3i$ も解である。もう1つの解を p とすると、解と係数の関係により

$$p+(2+3i)+(2-3i)=5$$

$$(2+3i)p+(2-3i)p+(2+3i)(2-3i)=a$$

$$(2+3i)(2-3i)p=-b$$

それぞれ整理すると

$$p+4=5, 4p+13=a, 13p=-b$$

これを解いて $p=1, a=17, b=-13$

したがって、他の解は $1, 2-3i$

3 次方程式 $3x^3-(a+3)x^2+a=0$ について
(1) 異なる 3 つの実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
(2) ただ 1 つの実数解をもつとき、定数 a の値の範囲を求めよ。また、その実数解を求めよ。

解答 (1) $a<-12, 0<a<\frac{3}{2}, \frac{3}{2}<a$ (2) $-12<a<0$, 実数解は 1

解説

$$3x^3-(a+3)x^2+a=-(x^2-1)a+3x^3-3x^2=-(x+1)(x-1)a+3x^2(x-1)$$
$$=(x-1)\{-(x+1)a+3x^2\}=(x-1)(3x^2-ax-a)$$

よって、方程式は $(x-1)(3x^2-ax-a)=0$ …… ①

ゆえに $x-1=0$ または $3x^2-ax-a=0$ …… ②

(1) ① が異なる 3 つの実数解をもつのは、② が 1 以外の異なる 2 つの実数解をもつときである。

よって、② の判別式を D とすると

$$D=(-a)^2-4\cdot 3(-a)>0 \quad \cdots\cdots \textcircled{3}$$

$$\text{かつ} \quad 3\cdot 1^2-a\cdot 1-a\neq 0 \quad \cdots\cdots \textcircled{4}$$

③ から $a(a+12)>0$ ゆえに $a<-12, 0<a$

④ から $a\neq \frac{3}{2}$

よって、求める a の値の範囲は $a<-12, 0<a<\frac{3}{2}, \frac{3}{2}<a$

(2) ① がただ 1 つの実数解をもつのは、次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1] ② が虚数解をもつとき

$$\text{そのための必要十分条件は} \quad D=(-a)^2-4\cdot 3(-a)<0$$

$$\text{よって} \quad -12<a<0$$

[2] ② が $x=1$ を重解にもつとき

$$\textcircled{2} \text{ が重解をもつための必要十分条件は} \quad D=(-a)^2-4\cdot 3(-a)=0$$

$$\text{よって} \quad a=-12, 0$$

重解は $x=-\frac{-a}{2\cdot 3}=\frac{a}{6}$ であるから

$$a=-12 \text{ のとき} \quad x=\frac{-12}{6}=-2$$

$$a=0 \text{ のとき} \quad x=0$$

ゆえに、② が $x=1$ を重解にもつことはない。

[1], [2] から、求める a の値の範囲は $-12<a<0$ また、実数解は 1

3 次方程式 $x^3-4x^2-5x+8=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

- (1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$
- (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
- (3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$
- (4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$
- (5) $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$
- (6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

解答 (1) $\frac{5}{8}$ (2) 26 (3) 100 (4) 498 (5) -16 (6) -12

解説

解と係数の関係から $\alpha+\beta+\gamma=4, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5, \alpha\beta\gamma=-8$

$$(1) \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-5}{-8}=\frac{5}{8}$$

$$(2) \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=4^2-2\cdot(-5)=26$$

$$(3) \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$
$$=4\{26-(-5)\}+3\cdot(-8)=124-24=100$$

$$(4) \quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$$

ここで $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=(-5)^2-2\cdot(-8)\cdot 4=89$$

$$\text{よって} \quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=26^2-2\cdot 89=676-178=498$$

別解 $\alpha^3-4\alpha^2-5\alpha+8=0, \beta^3-4\beta^2-5\beta+8=0, \gamma^3-4\gamma^2-5\gamma+8=0$ であるから

$$\alpha^3=4\alpha^2+5\alpha-8, \beta^3=4\beta^2+5\beta-8, \gamma^3=4\gamma^2+5\gamma-8$$

$$\text{よって} \quad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=\alpha(4\alpha^2+5\alpha-8)+\beta(4\beta^2+5\beta-8)+\gamma(4\gamma^2+5\gamma-8)$$
$$=4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+5(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-8(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=4\cdot 100+5\cdot 26-8\cdot 4=498$$

(5) $x^3-4x^2-5x+8=0$ の 3 つの解が α, β, γ であるから

$$x^3-4x^2-5x+8=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \quad \cdots\cdots \textcircled{1}$$

① の両辺に $x=3$ を代入して

$$3^3-4\cdot 3^2-5\cdot 3+8=(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$$

$$\text{よって} \quad (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=-16$$

別解 $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)=27-9(\alpha+\beta+\gamma)+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$$=27-9\cdot 4+3\cdot(-5)-(-8)=-16$$

(6) $\alpha+\beta+\gamma=4$ から $\alpha+\beta=4-\gamma, \beta+\gamma=4-\alpha, \gamma+\alpha=4-\beta$
したがって $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(4-\alpha)(4-\beta)(4-\gamma)$

① の両辺に $x=4$ を代入して

$$4^3-4\cdot 4^2-5\cdot 4+8=(4-\alpha)(4-\beta)(4-\gamma)$$

$$\text{よって} \quad (4-\alpha)(4-\beta)(4-\gamma)=-12$$

$$\text{すなわち} \quad (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=-12$$

別解 $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(4-\alpha)(4-\beta)(4-\gamma)$

$$=64-16(\alpha+\beta+\gamma)+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$
$$=64-16\cdot 4+4\cdot(-5)-(-8)=-12$$

1

次の式を計算せよ。

(1) $\{(-1+2i)-(7-3i)\}^2$

(2) $\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

(3) $\frac{2-i}{2+i}-\frac{3+i}{3-i}$

(4) $\frac{1+3i}{3-i}\times\frac{2i+3}{5i-1}$

2

2つの虚数 α , β について, 和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ がともに実数ならば, α と β は互いに共役な複素数であることを示せ。

3

2次方程式 $x^2+ax+b=0$ が $3-i$ を解にもつとき, 実数の定数 a , b の値を求めよ。

4

2つの2次方程式 $x^2+2ax+a+2=0$, $x^2+(a-1)x+a^2=0$ が次の条件を満たすとき, 定数 a の値の範囲を求めよ。
(1) ともに虚数解をもつ。 (2) どちらか一方だけが虚数解をもつ。

5

2次方程式 $2x^2-4x+1=0$ の2つの解を α , β ($\alpha<\beta$) とするとき, 次の式の値を求めよ。
(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ (3) $\alpha-\beta$

6

2 次方程式 $x^2+kx+24=0$ の 2 つの解の差が 5 であるとき、定数 k の値と 2 つの解を求めよ。

8

次の式を、(ア) 有理数 (イ) 実数 (ウ) 複素数 の各範囲で因数分解せよ。
(1) x^4-6x^2+5 (2) $2x^4-x^2-6$ (3) x^4+4

7

2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、 $\alpha-3, \beta-3$ を 2 つの解とする 2 次方程式が $x^2-2x+4=0$ であるという。定数 p, q の値を求めよ。

9

2 次方程式 $x^2+x-3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の 2 数を解とする 2 次方程式を作れ。
(1) $\alpha-2, \beta-2$ (2) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ (3) α^2, β^2

10

2 次方程式 $7x^2-3x-2=0$ の 2 つの解 α, β の逆数にそれぞれ 1 を加えた数を解とする 2 次方程式を作れ。ただし，係数は整数にせよ。

11

2 次方程式 $2x^2-4ax+a+3=0$ が次のような異なる 2 つの解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

- (1) とともに 1 より大きい
- (2) とともに 1 より小さい
- (3) 1 つの解が 1 より大きく，他の解が 1 より小さい

12

2 次方程式 $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，次の式の値を求めよ。

$$\frac{1}{(\alpha-1)(\beta-1)}+\frac{1}{(\alpha-2)(\beta-2)}+\frac{1}{(\alpha-3)(\beta-3)}$$

13

連立方程式 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ を解け。

14

$x^{100}+x^{99}+1$ を x^2-x で割ったときの余りを求めよ。

15

x についての整式 $P(x)$ は、 $(x+1)^2$ で割ると $-x+4$ 余り、 $(x-1)^2$ で割ると $2x+5$ 余るとする。

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) $P(x)$ を $(x+1)(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

17

4 次方程式 $x^4+ax^3-x^2+ax+b=0$ が -1 と 2 を解にもつとき、定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

18

3 次方程式 $x^3-5x^2+ax+b=0$ が $2+3i$ を解にもつとき、実数の定数 a, b の値を求めよ。また、他の解を求めよ。

16

方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とするとき

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}$ の値を求めよ。

(2) $\frac{\omega^5+3\omega+1}{\omega^2+1}$ の値を求めよ。

(3) $(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^2 b)$ を簡単にせよ。

19	20
3 次方程式 $3x^3-(a+3)x^2+a=0$ について (1) 異なる 3 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。 (2) ただ 1 つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。また，その実数解を求めよ。	3 次方程式 $x^3-4x^2-5x+8=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき，次の式の値を求めよ。 (1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$ (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ (4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ (5) $(3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$ (6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$