

1

(解説)

p について $-a \leq x-1 \leq a \iff 1-a \leq x \leq 1+a$

q について $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

r について $x^2 - 2x - a \leq 0$

$x^2 - 2x - a = 0$ を解くと $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$ (a は正の実数)

よって r を解くと $1 - \sqrt{1+a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1+a}$

(1) $a=1$ のとき, $p: 0 \leq x \leq 2$ である。

命題 $\lceil 0 \leq x \leq 2 \implies -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \rceil$ は真。

すなわち, 命題 $\lceil p \implies q \rceil$ は真。

命題 $\lceil -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \implies 0 \leq x \leq 2 \rceil$ は偽。

反例は $x = -1$

すなわち, 命題 $\lceil q \implies p \rceil$ は偽。

よって, p は q であるための十分条件であるが, 必要条件ではない。

すなわち, p は q であるための^ア ①。

また, $a=3$ のとき, $p: -2 \leq x \leq 4$ である。

命題 $-2 \leq x \leq 4 \implies -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ は偽。

反例は $x=3$

すなわち, 命題 $\lceil p \implies q \rceil$ は偽。

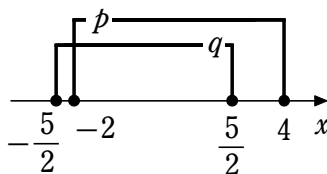
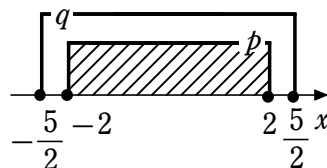
命題 $\lceil -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \implies -2 \leq x \leq 4 \rceil$ は偽。

反例は $x = -\frac{5}{2}$

すなわち, 命題 $\lceil q \implies p \rceil$ は偽。

よって, p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

すなわち, p は q であるための^イ ③。



(2) 命題「 $p \implies q$ 」が真となるための条件は、

右の図から $-\frac{5}{2} \leq 1-a$ かつ $1+a \leq \frac{5}{2}$ である。

$$-\frac{5}{2} \leq 1-a \text{ から } a \leq \frac{7}{2}$$

$$1+a \leq \frac{5}{2} \text{ から } a \leq \frac{3}{2}$$

$$a \leq \frac{7}{2} \text{ かつ } a \leq \frac{3}{2} \text{ より } a \leq \frac{3}{2}$$

$$a > 0 \text{ であるから } 0 < a \leq \frac{3}{2}$$

よって、命題「 $p \implies q$ 」が真となるような

a の最大値は $\frac{3}{2}$ である。

また、命題「 $q \implies p$ 」が真となるための条件は、

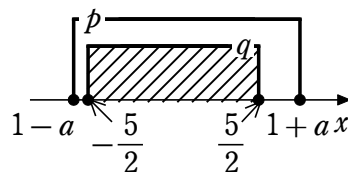
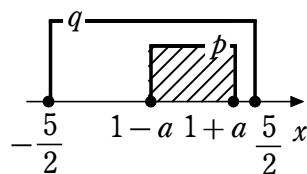
右の図から $1-a \leq -\frac{5}{2}$ かつ $\frac{5}{2} \leq 1+a$ である。

$$1-a \leq -\frac{5}{2} \text{ から } a \geq \frac{7}{2}$$

$$\frac{5}{2} \leq 1+a \text{ から } a \geq \frac{3}{2}$$

$$a \geq \frac{7}{2} \text{ かつ } a \geq \frac{3}{2} \text{ より } a \geq \frac{7}{2}$$

よって、命題「 $q \implies p$ 」が真となるような a の最小値は $\frac{7}{2}$ である。



(3) 命題「 $r \implies q$ 」が真となるための条件は、

右の図から

$$-\frac{5}{2} \leq 1-\sqrt{1+a} \text{ かつ } 1+\sqrt{1+a} \leq \frac{5}{2}$$

である。

$$-\frac{5}{2} \leq 1-\sqrt{1+a} \text{ から } \sqrt{1+a} \leq \frac{7}{2} \quad \dots\dots ①$$

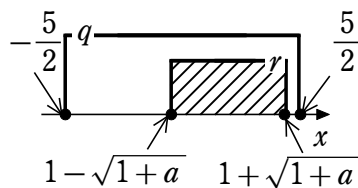
①の両辺は0以上であるから、

両辺を2乗しても同値である。

$$\text{よって、} 1+a \leq \frac{49}{4} \text{ から } a \leq \frac{45}{4}$$

$$1+\sqrt{1+a} \leq \frac{5}{2} \text{ から } \sqrt{1+a} \leq \frac{3}{2} \quad \dots\dots ②$$

②の両辺は0以上であるから、両辺を2乗しても同値である。



$$\text{よって, } 1+a \leq \frac{9}{4} \text{ から } a \leq \frac{5}{4}$$

$$a \leq \frac{45}{4} \text{ かつ } a \leq \frac{5}{4} \text{ より } a \leq \frac{5}{4}$$

$$a > 0 \text{ であるから } 0 < a \leq \frac{5}{4}$$

よって, 命題「 $r \implies q$ 」が真となるような a の最大値は $\frac{5}{4}$ である。

2

解説

$$(1) \triangle ABC \text{ の外接円の半径を } R \text{ とすると, 正弦定理により } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R$$

$$\text{よって } \frac{\sqrt{5}}{5} \div \frac{3}{5} = 2R$$

$$\text{これを解いて } R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

$$\sin^2 \angle ACB + \cos^2 \angle ACB = 1 \text{ から}$$

$$\cos^2 \angle ACB = 1 - \sin^2 \angle ACB = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\text{よって } \cos \angle ACB = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

$BC = a$ とする。

$$\text{余弦定理により } \cos \angle ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}$$

$$[1] \cos \angle ACB = -\frac{4}{5} \text{ のとき } -\frac{4}{5} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a}$$

$$\text{整理して } 45a^2 + 24a - 4 = 0 \quad \text{ゆえに } (3a+2)(15a-2) = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = \frac{2}{15} \quad \text{すなわち } BC = \frac{2}{15}$$

$$[2] \cos \angle ACB = \frac{4}{5} \text{ のとき } \frac{4}{5} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a}$$

$$\text{整理して } 45a^2 - 24a - 4 = 0 \quad \text{ゆえに } (3a-2)(15a+2) = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = \frac{2}{3} \quad \text{すなわち} \quad BC = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(2) (1) \text{ から, } BC = \frac{2}{3} \text{ のとき } \cos \angle ACB = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって } \tan \angle ACB = \frac{\sin \angle ACB}{\cos \angle ACB} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{2}{15}\right) \div \frac{2\sqrt{5}}{15} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{また, } \triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$$

$$\text{次に, } \triangle OAP \equiv \triangle OBP \text{ であるから } \angle AOP = \angle BOP$$

$$\text{よって } \angle AOP = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$\text{一方, 円周角の定理から } \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

したがって, $\angle AOP = \angle ACB$ であるから

$$\tan \angle AOP = \tan \angle ACB = \frac{3}{4}$$

また, $\angle OAP = 90^\circ$ であるから

$$AP = OA \tan \angle AOP = \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{さらに, } \triangle AOR \equiv \triangle BOR \text{ であるから } \angle ARO = \angle BRO = 90^\circ$$

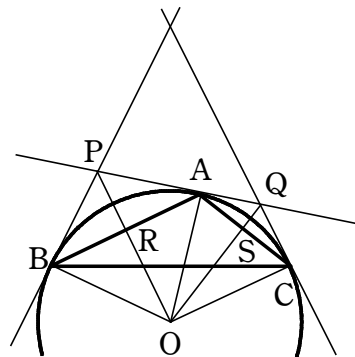
$$\text{同様に, } \triangle AOS \equiv \triangle COS \text{ であるから } \angle ASO = \angle CSO = 90^\circ$$

よって, 四角形ORASは円に内接しているから

$$\angle RAS + \angle ROS = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \angle BAC + \angle ROS = 180^\circ$$

$$\text{したがって } \cos \angle ROS = \cos(180^\circ - \angle BAC) = -\cos \angle BAC$$

$$= -\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



(1) 全期間における X と Y の相関係数 r は

$$r = \frac{0.0263}{0.105 \cdot 0.260} > \frac{0.0260}{0.105 \cdot 0.260} = 0.952 \dots\dots$$

であるから $0.91 < r$ (ア ⑤)

(2) (㊸ について)

図 4 から、期間 A における最大値は 3.2 以上であり、期間 B における最大値は 1.6 以下であることがわかる。

よって、誤っている。

(㊹ について)

図 4 から、期間 A における第 1 四分位数は、期間 B における第 1 四分位数をわずかに上回っていることがわかる。

よって、誤っている。

(㊺ について)

図 4 から、期間 A における四分位範囲と期間 B における四分位範囲の差は 0.2 (1 目盛分) より大きくないことがわかる。

よって、誤っている。

(㊻ について)

図 4 から、期間 A における最大値は期間 B における最大値より大きい。

また、期間 A における最小値は期間 B における最小値より小さい。

したがって、期間 A における範囲は、期間 B における範囲より大きいことがわかる。

よって、誤っている。

(㊼ について)

期間 A における中央値の 8 倍は $0.0584 \times 8 = 0.4672$

期間 B における中央値の 8 倍は $0.0252 \times 8 = 0.2016$

図 4 から、どちらの期間においても、四分位範囲は少なくとも 0.6 より大きいことがわかる。

よって、正しい。

(㊽ について)

図 4 から、期間 A において、第 3 四分位数は 0.4 である。図 3 から、0.4 は度数が最大の階級に入っている。

よって、正しい。

(㊾ について)

図 4 から、期間 B において、第 1 四分位数は -0.4 以上 -0.2 未満である。図 3 から、

度数が最大の階級は 0 以上 0.5 未満の階級であることがわかる。

よって、誤っている。

以上から、図 3 および図 4 から U のデータについて読み取れることとして正しいもの

は イ ④, ウ ⑤

(3) 752 個の X , Y , X' , Y' のデータの値をそれぞれ

$$X_1, X_2, \dots, X_{752}$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_{752}$$

$$X'_1, X'_2, \dots, X'_{752}$$

$$Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_{752}$$

とする。

また, X , Y , X' , Y' の平均値をそれぞれ $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{X'}$, $\overline{Y'}$, 分散をそれぞれ s_X^2 ,

s_Y^2 , $s_{X'}^2$, $s_{Y'}^2$ とする。

さらに, X と Y の共分散を s_{XY} , 相関係数を r , X' と Y' の共分散を $s_{X'Y'}$, 相関係数を r' とする。

$s_{X'}^2 = a^2 s_X^2$ であるから, X' の分散は, X の分散の a^2 (イ ②) 倍になる。

$$\begin{aligned} s_{X'Y'} &= \frac{1}{752} \{ (X'_1 - \overline{X'})(Y'_1 - \overline{Y'}) + (X'_2 - \overline{X'})(Y'_2 - \overline{Y'}) \\ &\quad + \dots + (X'_{752} - \overline{X'})(Y'_{752} - \overline{Y'}) \} \\ &= \frac{1}{752} \{ [(aX_1 + b) - (a\overline{X} + b)] [(cY_1 + d) - (c\overline{Y} + d)] \\ &\quad + [(aX_2 + b) - (a\overline{X} + b)] [(cY_2 + d) - (c\overline{Y} + d)] \\ &\quad + \dots + [(aX_{752} + b) - (a\overline{X} + b)] [(cY_{752} + d) - (c\overline{Y} + d)] \} \\ &= \frac{1}{752} \{ ac(X_1 - \overline{X})(Y_1 - \overline{Y}) + ac(X_2 - \overline{X})(Y_2 - \overline{Y}) \\ &\quad + \dots + ac(X_{752} - \overline{X})(Y_{752} - \overline{Y}) \} \\ &= acs_{XY} \end{aligned}$$

よって, X' と Y' の共分散は, X と Y の共分散の ac (オ ③) 倍である。

$$r' = \frac{s_{X'Y'}}{s_{X'}s_{Y'}} = \frac{acs_{XY}}{|a|s_X|c|s_Y} = \frac{ac}{|ac|}r$$

ゆえに, X' と Y' の相関係数は, X と Y の相関係数の $\frac{ac}{|ac|}$ (カ ④) 倍である。

$$\begin{aligned} \text{参考)} \quad s_{X'}^2 &= \frac{1}{752} \{ (X'_1 - \overline{X'})^2 + (X'_2 - \overline{X'})^2 + \dots + (X'_{752} - \overline{X'})^2 \} \\ &= \frac{1}{752} \{ [(aX_1 + b) - (a\overline{X} + b)]^2 + [(aX_2 + b) - (a\overline{X} + b)]^2 \\ &\quad + \dots + [(aX_{752} + b) - (a\overline{X} + b)]^2 \} \end{aligned}$$

$$+ \cdots + \{(aX_{752} + b) - (a\bar{X} + b)\}^2]$$

$$= \frac{1}{752} \{a^2(X_1 - \bar{X})^2 + a^2(X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + a^2(X_{752} - \bar{X})^2\} = a^2 s_X^2$$

このとき、 $s_{X'} = |a|s_X$ であり、同様に $s_{Y'} = |c|s_Y$ である。

(4) 散布図 1 の点の分布は最も右上がりの直線に近いから、 $r_1 = 0.98$ と考えられる。

散布図 2 の点の分布には、相関関係はほとんど見られないから、 $r_2 = 0.10$ と考えられる。

散布図 3 の点の分布は最も右下がりの直線に近いから、 $r_3 = -0.76$ と考えられる。

以上から、 r_1 、 r_2 および r_3 の値の組合せとして正しいものはキ ⑤ である。

$$(1) \quad a_1 = \frac{1}{3} \text{ から } \frac{1}{a_1} = 3$$

また, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$ であるから, $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ は初項 3, 公差 1 の等差数列である。

$$\text{ゆえに } \frac{1}{a_n} = 3 + 1 \times (n-1) = n+2$$

$$\text{よって } a_n = \frac{1}{n+2}$$

$$(2) \quad b_1 = a_1 a_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} a_{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$

$$\text{よって } b_{n+1} + \frac{1}{n+4} = b_n + \frac{1}{n+3}$$

$$\text{ゆえに } b_n + \frac{1}{n+3} = b_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$\text{したがって } b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$