$\boxed{1}$

解答　(1)　∞　(2)　$-\infty$　(3)　∞　(4)　0　(5)　極限なし（振動）
(6)　極限なし（振動　(7)　極限なし（振動）

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}3^n=\infty$　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n}{3}\right)=-\infty$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2}-1\right)=\infty$　(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n^2}\right)=0$

(5)　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$　となるから，振動し，極限はない。
(6)　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$　となるから，振動し，極限はない。
(7)　$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots\cdots$　となるから，振動し，極限はない。

$\boxed{2}$

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　$-\dfrac{5}{2}$　(4)　$\sqrt{3}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n^2}}=0$

別解　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3-\frac{2}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n^2}}=0$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+7n-6}{-2n^2-3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{7}{n}-\frac{6}{n^2}}{-2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=-\frac{5}{2}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\sqrt{3}$

$\boxed{3}$

解答　1

解説

$\displaystyle(\text{分母})=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

$\displaystyle(\text{分子})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

よって　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$

$\boxed{4}$

解答　(1)　-2　(2)　0

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{n^2-(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{-1}=-2$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)-n}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=0$

$\boxed{5}$

解答　(1)　0　(2)　0

解説

(1)　$\displaystyle-1\leqq\cos\frac{n\pi}{4}\leqq1$ であるから　$\displaystyle-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{4}=0$

(2)　$-1\leqq(-1)^n\leqq1$ であるから　$\displaystyle-\frac{1}{n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=0$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　(2)　0

解説

(1)　$n\geqq3$ のとき

$2^n=(1+1)^n=1+{}_nC_1+{}_nC_2+\ \cdots\cdots\ +{}_nC_{n-1}+1$

$\displaystyle\geqq1+n+\frac{1}{2}n(n-1)+\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n^3+\frac{5}{6}n+1>\frac{1}{6}n^3$

よって　$\displaystyle2^n>\frac{1}{6}n^3$

(2)　(1) の結果から　$\displaystyle0<\frac{1}{2^n}<\frac{6}{n^3}$　よって　$\displaystyle0<\frac{n^2}{2^n}<\frac{6}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

解答　(1)　∞　(2)　0　(3)　0　(4)　極限なし（振動）　(5)　$-\infty$　(6)　0
(7)　$-\infty$　(8)　0　(9)　極限なし（振動）　(10)　極限なし
(11)　極限なし（振動）

解説

(1)　$|2|>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$　(2)　$\displaystyle\left|\frac{1}{3}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

(3)　$\displaystyle\left|-\frac{1}{4}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=0$

(4)　$-3<-1$ であるから，数列 $\{(-3)^n\}$ は振動し，極限はない。

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4-n^2)=-\infty$　(6)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2^n}=0$

(7)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt{n})=-\infty$　(8)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}=0$

(9)　$2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \cdots\cdots$　となるから，振動し，極限はない。
(10)　$-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots\cdots$　となるから，極限はない。
(11)　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$　となるから，振動し，極限はない。

$\boxed{2}$

解答　(1)　$-\infty$　(2)　$-\dfrac{1}{2}$　(3)　∞　(4)　0　(5)　2

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2-3n^3)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(\frac{1}{n}-3\right)=-\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{-2n+3}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n}}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n-1)}{n+1}=\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{3+2n-n^2-4n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n}-4}=0$

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{4}{2}=2$

$\boxed{3}$

解答　(1)　3　(2)　2

解説

(1)　$\displaystyle(\text{分母})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle(\text{分子})=\sum_{k=1}^{n}k(3k+2)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+2\}=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$

よって　$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)}{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+3)}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(2+\frac{3}{n}\right)}{2+\frac{1}{n}}=3$

(2)　$(分母)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$

$(分子)=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(2n+1)$

よって　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=2$

$\boxed{4}$

解答　(1) $\frac{1}{2}$　(2) $-\frac{3}{2}$　(3) 2　(4) $\frac{3}{2}$　(5) $\frac{1}{4}$

解説

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n})(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{(n^2+2n)-(n^2-2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}{4n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\{(n-3)-n\}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3\sqrt{n}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1}=-\frac{3}{2}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n+2)-(n-2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\{(n+1)-(n-1)\}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{2(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2$

(4) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+\sqrt{n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{2}$

(5) $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{\left(4+\frac{1}{n}\right)-4\right\}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}=\frac{1}{4}$

$\boxed{5}$

解答　(1) 0　(2) 0　(3) 0

解説

(1) $-1\leqq(-1)^n\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{2n+1}\leqq\frac{(-1)^n}{2n+1}\leqq\frac{1}{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0$

(2) $-1\leqq\sin\frac{n\pi}{2}\leqq1$ であるから　$-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\leqq\frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

(3) $0\leqq\cos^2 n\theta\leqq1$ であるから　$0\leqq\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}\leqq\frac{1}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}0=0$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2 n\theta}{n^2+1}=0$

$\boxed{6}$

解答　(1) 略　(2) 0

解説

(1) $(1+h)^n\geqq1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$　……①　とする。

[1]　$n=1$ のとき

$(左辺)=1+h$

$(右辺)=1+h+\frac{1(1-1)}{2}h^2=1+h$

$n=2$ のとき

$(左辺)=(1+h)^2=1+2h+h^2$

$(右辺)=1+2h+\frac{2(2-1)}{2}h^2=1+2h+h^2$

よって，$n=1$，2 のとき (左辺)=(右辺) となり，① は成り立つ。

[2]　$n\geqq3$ のとき

二項定理により

$(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+{}_n\mathrm{C}_3h^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n$　……②

${}_n\mathrm{C}_r>0$，$h>0$ であるから　${}_n\mathrm{C}_3h^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n>0$

よって，② から　$(1+h)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2$

したがって　$(1+h)^n>1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2$

[1]，[2] から，$h>0$ のとき，すべての自然数 n について，① は成り立つ。

(2) ① に $h=2$ を代入すると　$(1+2)^n\geqq1+n\cdot2+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2^2$

よって　$3^n\geqq2n^2+1$　ゆえに　$0<\frac{n}{3^n}\leqq\frac{n}{2n^2+1}$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}}=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

1

解答　(1)　1　　(2)　2

解説

(1)　分母は　$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=1$

(2)　$\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}$

$=\frac{\{(n+4)-(n+2)\}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\{(n+1)-n\}(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}=\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=2$$

2

解答　(1)　$\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$　　(2)　$\frac{1}{3}$

解説

(1)　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left\{n^2+an+b-\left(n+\frac{a}{2}\right)^2\right\}}{\sqrt{n^2+an+b}+n+\frac{a}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{a^2}{4}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}}+1+\frac{a}{2n}}$

$=\frac{b}{2}-\frac{a^2}{8}$

(2)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n\cdot(n+1)=\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

よって　$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{3}$

3

解答　(1)　順に　(ア)　0，$\frac{1}{2}$　　(イ)　$-\frac{5}{3}$，$-\infty$　　(2)　$a=8$　(3)　1

解説

(1)　(ア)　$a_n=(2n-1)a_n\times\frac{1}{2n-1}$ であり

$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=1$，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=1\times0=0$

$na_n=(2n-1)a_n\times\frac{n}{2n-1}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$ であるから

$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(イ)　$\frac{a_n-3}{2a_n+1}=b_n$ とおき，両辺に $2a_n+1$ を掛けると

$a_n-3=(2a_n+1)b_n$

ゆえに　$(2b_n-1)a_n=-(b_n+3)$

$b_n=\frac{1}{2}$ とすると $0\cdot a_n=-\frac{7}{2}$ となり，これは不合理である。

よって，$b_n\neq\frac{1}{2}$ であるから　$a_n=-\frac{b_n+3}{2b_n-1}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=2$ であるから

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{b_n+3}{2b_n-1}\right)=-\frac{2+3}{2\cdot2-1}=-\frac{5}{3}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}na_n=-\infty$

(2)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+an+2)-(n^2+2n+3)}{\sqrt{n^2+an+2}+\sqrt{n^2+2n+3}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}$

$=\frac{a-2}{2}$

よって，条件から　$\frac{a-2}{2}=3$　　ゆえに　$a=8$

(3)　$n\longrightarrow\infty$ のとき $a_n\longrightarrow\infty$ であるから，$a_n>0$ としてよい。

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n^2+a_n+1}-\sqrt{a_n^2-a_n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^2+a_n+1)-(a_n^2-a_n+1)}{\sqrt{a_n^2+a_n+1}+\sqrt{a_n^2-a_n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{\sqrt{a_n^2+a_n+1}+\sqrt{a_n^2-a_n+1}}$

分母，分子を $a_n\,(>0)$ で割って

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$

4

解答　0

解説

$-1\leqq\sin\frac{n\pi}{2}\leqq1$ であるから　$-\frac{n}{n^2+1}\leqq\frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}\leqq\frac{n}{n^2+1}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)=0$ である

から，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sin\frac{n\pi}{2}=0$

5

解答　π

解説

$[10^{2n}\pi]\leqq10^{2n}\pi<[10^{2n}\pi]+1$ が成り立つから，各辺を 10^{2n} で割ると

$\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi<\frac{[10^{2n}\pi]+1}{10^{2n}}$　すなわち　$\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi<\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}$

よって　$\pi-\frac{1}{10^{2n}}<\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}\leqq\pi$

$\lim_{n\to\infty}\left(\pi-\frac{1}{10^{2n}}\right)=\pi$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}=\pi$

1

解答　$\dfrac{a^2}{3}$

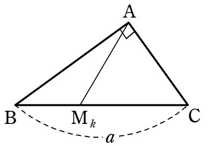
解説

$\triangle \mathrm{ABM}_k$ において余弦定理を用いると

$$\mathrm{AM}_k{}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}_k{}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}_k\cos B$$

一方，$\triangle\mathrm{ABC}$ において　$\mathrm{AB}=a\cos B$

また　$\mathrm{BM}_k=\dfrac{ka}{n}$　（B に近い方から M_1，M_2，……）



よって　$\mathrm{AM}_k{}^2=a^2\cos^2B+\dfrac{k^2a^2}{n^2}-\dfrac{2k}{n}a^2\cos^2B$

したがって　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{AM}_k{}^2=a^2\cos^2B\sum_{k=1}^{n-1}1+\frac{a^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2-\frac{2}{n}a^2\cos^2B\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=a^2\cos^2B\cdot(n-1)+\frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{2}{n}a^2\cos^2B\cdot\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{a^2}{6n}(n-1)(2n-1)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2(2n-1)}{6n}=\frac{a^2}{3}$

2

解答　(1)　$S(n)=\dfrac{mn(mn+1)}{2}$　　(2)　$T(n)=\dfrac{mn^2(m-1)}{2}$　　(3)　$\dfrac{m-1}{m}$

解説

(1)　$S(n)=1+2+\cdots\cdots+mn=\dfrac{mn(mn+1)}{2}$

(2)　1，2，……，mn の中で m の倍数の総和を $U(n)$ とすると

$$U(n)=\sum_{k=1}^{n}mk=m\sum_{k=1}^{n}k=m\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{mn(n+1)}{2}$$

よって　$T(n)=S(n)-U(n)=\dfrac{mn(mn+1)}{2}-\dfrac{mn(n+1)}{2}=\dfrac{mn^2(m-1)}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{mn^2(m-1)}{2}}{\frac{mn(mn+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{m-1}{m+\frac{1}{n}}=\frac{m-1}{m}$

3

解答　(1)　略　　(2)　e

解説

(1)　$a_n=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$\leqq 1\cdot1\cdot1\cdot\cdots\cdots\cdot1\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

これと $a_n>0$ から　$0<a_n\leqq\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(2)　$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{n!}{n^n}\cdot\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{\cancel{n!}}{n^n}\cdot\dfrac{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!(n+1)}}=\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

4

解答　(1)　略　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$

(3)　$\dfrac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$　　(4)　$\dfrac{1}{(1+x)^2}$

解説

(1)　$(1+t)^n\geqq1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2$　……①

[1]　$n=1$ のとき

(① の左辺)$=1+t$

(① の右辺)$=1+1\cdot t+0=1+t$

よって，① は成り立つ。

[2]　$n=2$ のとき

(① の左辺)$=(1+t)^2=1+2t+t^2$

(① の右辺)$=1+2\cdot t+\dfrac{2\cdot1}{2}t^2=1+2t+t^2$

よって，① は成り立つ。

[3]　$n\geqq3$ のとき　二項定理により

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1t+{}_n\mathrm{C}_2t^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k$$

$$=1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k$$

$t>0$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\,t^k>0$

よって　$(1+t)^n>1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2$

[1]，[2]，[3] から，すべての自然数 n に対して，① が成り立つ。

(2)　(前半)　(1) から　$0<\dfrac{n}{(1+t)^n}\leqq\dfrac{n}{1+nt+\dfrac{n(n-1)}{2}t^2}$

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+t+\frac{n-1}{2}t^2}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$

(後半)　$0<r<1$ であるから，実数 $t>0$ を用いて $r=\dfrac{1}{1+t}$ と表すことができる。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+t)^n}=0$

(3)　$S_n=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}$

$-xS_n=\quad -x+2x^2-3x^3+4x^4-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1}+(-1)^nnx^n$

辺々を引いて

$(1+x)S_n=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}-(-1)^nnx^n$

$x\neq-1$ であるから

$(1+x)S_n=\dfrac{1-(-x)^n}{1-(-x)}+(-1)^{n+1}nx^n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}x^n+(-1)^{n+1}nx^n(1+x)}{1+x}$

$$=\frac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{1+x}$$

よって　$S_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}(n+1)x^n+(-1)^{n+1}nx^{n+1}}{(1+x)^2}$

(4)　$-(n+1)x^n\leqq(-1)^{n+1}(n+1)x^n\leqq(n+1)x^n$ が成り立つ。

$0<x<1$ のとき，(2) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=\lim_{n\to\infty}(nx^n+x^n)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{-(n+1)x^n\}=-\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n=0$

また　$-nx^{n+1}\leqq(-1)^{n+1}nx^{n+1}\leqq nx^{n+1}$

$0<x<1$ のとき，(2) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx^{n+1}=\lim_{n\to\infty}nx^n\cdot x=0$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-nx^{n+1})=-\lim_{n\to\infty}nx^{n+1}=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}nx^{n+1}=0$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1+0+0}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$

1

解答　(1)　3　　(2)　∞　　(3)　$-\infty$

解説

(1)　$\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n}=3-2\cdot0=3$$

(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+2^{2n}}{3^n-2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-2\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\infty$

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}(2^n-3^n)=\lim\limits_{n\to\infty}3^n\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1\right\}=-\infty$

2

解答　$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq1+\sqrt{2}$

極限値は $x=1\pm\sqrt{2}$ のとき 1；$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$ のとき 0

解説

与えられた数列が収束するための必要十分条件は

$-1<x^2-2x\leqq1$　……[A]

$-1<x^2-2x$ から　　$x^2-2x+1>0$

ゆえに　　$(x-1)^2>0$　　　　よって　　$x\fallingdotseq1$　……①

$x^2-2x\leqq1$ から　　$x^2-2x-1\leqq0$

$x^2-2x-1=0$ の解は　　$x=1\pm\sqrt{2}$

ゆえに，不等式の解は　　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq1+\sqrt{2}$　……②

よって，求める x の値の範囲は，① と ② の共通範囲をとって

$1-\sqrt{2}\leqq x<1$，$1<x\leqq1+\sqrt{2}$

また，[A] で $x^2-2x=1$ となるのは $x=1\pm\sqrt{2}$ のとき。

したがって，数列の極限値は

$x^2-2x=1$　すなわち　$x=1\pm\sqrt{2}$ のとき　1

$-1<x^2-2x<1$　すなわち　$1-\sqrt{2}<x<1$，$1<x<1+\sqrt{2}$ のとき　0

3

解答　$|r|<1$ のとき 0，　$r=1$ のとき $\dfrac{2}{3}$，　$r=-1$ のとき極限はない，

$|r|>1$ のとき 1

解説

[1]　$|r|<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}r^{2n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{0+0}{0+2}=0$$

[2]　$r=1$ のとき　$r^n=1$，$r^{2n}=1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

[3]　$r=-1$ のとき　　$\dfrac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{1+2}=\dfrac{1+(-1)^n}{3}$

よって，極限はない。(振動する)

[4]　$|r|>1$ のとき　$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$，$\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r^n}{r^{2n}+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+2\left(\frac{1}{r^2}\right)^n}=\frac{1+0}{1+2\cdot0}=1$$

4

解答　(1)　$a_n=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，極限は 3　(2)　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$，極限は 0

(3)　$a_n=\dfrac{11}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，極限は $\dfrac{11}{3}$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形して　　$a_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(a_n-3)$

また　　　$a_1-3=1-3=-2$

よって，数列 $\{a_n-3\}$ は，初項 -2，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列である。

ゆえに　　$a_n-3=-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　　すなわち　$a_n=3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

よって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=3$

(2)　$a_1>0$ であるから　　$a_2=\dfrac{a_1}{2+a_1}>0$

同様にして　　$a_3>0$，$a_4>0$，……，$a_n>0$

したがって　　$a_n\fallingdotseq0$

与えられた漸化式の両辺の逆数をとると　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2+a_n}{a_n}$

すなわち　　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\dfrac{1}{a_n}+1$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　　$b_{n+1}=2b_n+1$

よって　　$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

また　　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=2+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 2 の等比数列で　　$b_n+1=3\cdot2^{n-1}$

よって　　$b_n=3\cdot2^{n-1}-1$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{3\cdot2^{n-1}-1}$

したがって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(3)　与えられた漸化式を変形して

$a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}-a_n)$，$a_{n+2}-\dfrac{1}{4}a_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n$

これと　$a_2-a_1=2$，$a_2-\dfrac{1}{4}a_1=\dfrac{11}{4}$　から

$a_{n+1}-a_n=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n=\dfrac{11}{4}$

辺々を引くと　　$-\dfrac{3}{4}a_n=2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}-\dfrac{11}{4}$

ゆえに　　$a_n=\dfrac{11}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$　　　よって　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{11}{3}$

5

解答　(1)　$p_1=\dfrac{1}{6}$，$p_2=\dfrac{5}{18}$，$p_3=\dfrac{19}{54}$　　(2)　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$

(3)　略

解説

(1)　p_1 は，さいころを 1 回投げるとき，1 の目が 1 回出る確率であるから　　$p_1=\dfrac{1}{6}$

p_2 は，さいころを 2 回投げるとき，1 の目がちょうど 1 回出る確率であるから

$$p_2={}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$$

p_3 は，さいころを 3 回投げるとき，1 の目がちょうど 1 回出るか，または 1 の目が 3 回出る確率であるから

$$p_3={}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{76}{6^3}=\frac{19}{54}$$

(2)　さいころを $n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出るのは，次の [1]，[2] の 2 つの場合があり，これらの事象は互いに排反である。

[1]　n 回目までに 1 の目が奇数回出て，$n+1$ 回目に 1 の目が出ない

[2]　n 回目までに 1 の目が偶数回出て，$n+1$ 回目に 1 の目が出る

n 回目までに 1 の目が奇数回出る確率は p_n，偶数回出る確率は $1-p_n$ であるから，

$n+1$ 回投げて 1 の目が奇数回出る確率 p_{n+1} は

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{5}{6}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{6}$$

(3)　(2) から　　　$p_{n+1}=\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{6}$　　　　変形すると　　$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから　　$p_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　　$p_n=-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}=0$ であるから　　$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\dfrac{1}{2}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　4

解説

(1)　[1]　$n=2$ のとき　$a_2-4=\sqrt{a_1+12}-4>0$　($a_1>4$ から)

よって，$a_2>4$ となり　$n=2$ のとき $a_n>4$ は成り立つ。

[2]　$n=k$ $(\geqq2)$ のとき　$a_k>4$ が成り立つと仮定すると

$a_{k+1}-4=\sqrt{a_k+12}-4>0$　(仮定から)

よって　$a_{k+1}>4$ となり　$n=k+1$ のときも $a_n>4$ は成り立つ。

したがって　[1]，[2] から　$n=2$，3，…… に対して，$a_n>4$ が成り立つ。

(2) $a_{n+1}-4=\sqrt{a_n+12}-4=\dfrac{1}{\sqrt{a_n+12}+4}\cdot(a_n-4)$

(1) から $a_n>4$ ($n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$)，条件から $a_1>4$ であるから

$a_n>4$ ($n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$)

よって $\sqrt{a_n+12}+4>\sqrt{4+12}+4=8$ となり $0<\dfrac{1}{\sqrt{a_n+12}+4}<\dfrac{1}{8}$，$a_n-4>0$

ゆえに $a_{n+1}-4<\dfrac{1}{8}(a_n-4)$

(3) (2) の不等式をくり返し用いると，

$0<a_n-4<\dfrac{1}{8}(a_{n-1}-4)<\left(\dfrac{1}{8}\right)^2(a_{n-2}-4)<\cdots\cdots<\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)$ となり

$0<a_n-4<\left(\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\cdot(a_1-4)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}(a_1-4)=0$ であるから，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-4)=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=4$

$\boxed{1}$

解答 (1) $-\infty$ (2) -4 (3) 7

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-10^n}{3^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-10^n}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{10}{9}\right)^n\right\}=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}+4^{n+1}}{3^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n+4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}=-4$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^{n+1}+7^{n+1}}{3^n+5^n+7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\left(\frac{5}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=7$

$\boxed{2}$

解答 (1) $0\leqq x<1$；極限値は $x=0$ のとき 1，$0<x<1$ のとき 0

(2) $1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$；極限値は $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき 1，

$1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき 0

解説

(1) 数列 $\{(1-2x)^n\}$ が収束するための条件は $-1<1-2x\leqq 1$

$-1<1-2x$ から $x<1$，$1-2x\leqq 1$ から $x\geqq 0$

x の値の範囲は，共通範囲をとって $0\leqq x<1$

また，極限値は $1-2x=1$ すなわち $x=0$ のとき 1

$-1<1-2x<1$ すなわち $0<x<1$ のとき 0

(2) 数列 $\{(x^2-2x-1)^n\}$ が収束するための条件は

$-1<x^2-2x-1\leqq 1$ ……[A]

$-1<x^2-2x-1$ から $x(x-2)>0$

ゆえに $x<0$，$2<x$ ……①

$x^2-2x-1\leqq 1$ から $x^2-2x-2\leqq 0$

この不等式の解は $1-\sqrt{3}\leqq x\leqq 1+\sqrt{3}$ ……②

求める x の値の範囲は，① と ② の共通範囲をとって

$1-\sqrt{3}\leqq x<0$，$2<x\leqq 1+\sqrt{3}$

また，[A] で $x^2-2x-1=1$ となるのは $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき。

よって，極限値は

$x^2-2x-1=1$ すなわち $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき 1

$-1<x^2-2x-1<1$ すなわち $1-\sqrt{3}<x<0$，$2<x<1+\sqrt{3}$ のとき 0

$\boxed{3}$

解答 (1) $|r|<1$ のとき $\dfrac{1-r}{1+r}$，$r=1$ のとき $-\dfrac{1}{3}$，$r=-1$ のとき 1，

$|r|>1$ のとき -1

(2) $|r|<1$ のとき $\dfrac{1}{1-r}$，$r=1$ のとき 1，$r=-1$ のとき 極限はない，

$|r|>1$ のとき $1-r$

解説

(1) [1] $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{2n}=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-r-0}{1+r+0}=\frac{1-r}{1+r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-1-1}{1+1+1}=-\frac{1}{3}$

[3] $r=-1$ のとき $r^{2n}=1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\frac{1-(-1)-1}{1-1+1}=1$

[4] $|r|>1$ のとき $\left|\dfrac{1}{r^2}\right|<1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-r-r^{2n}}{1+r+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n-1}{(1+r)\left(\frac{1}{r^2}\right)^n+1}=-1$

(2) [1] $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^{n+2}=0$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\frac{1+0-0}{1-r+0}=\frac{1}{1-r}$

[2] $r=1$ のとき $r^{n+1}=1$，$r^{n+2}=1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\frac{1+1-1}{1-1+1}=1$

[3] $r=-1$ のとき $\dfrac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\dfrac{1+(-1)^{n+1}-(-1)^{n+2}}{1-(-1)+(-1)^{n+1}}$

$=\dfrac{1-2(-1)^n}{2-(-1)^n}=\dfrac{3}{(-1)^n-2}+2$

よって，極限はない。(振動する)

[4] $|r|>1$ のとき $\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+r^{n+1}-r^{n+2}}{1-r+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1-r}{(1-r)\left(\frac{1}{r}\right)^{n+1}+1}=1-r$

$\boxed{4}$

解答 (1) $a_n=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$，極限は ∞ (2) $a_n=\dfrac{1}{3^n-1}$，極限は 0

(3) $a_n=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$，極限は $\dfrac{4}{7}$

解説

(1) 与えられた漸化式を変形して $a_{n+1}+1=\dfrac{3}{2}(a_n+1)$

また $a_1+1=1+1=2$

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 2，公比 $\dfrac{3}{2}$ の等比数列である。

ゆえに $a_n+1=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ すなわち $a_n=2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}=\infty$

(2) $a_1=\dfrac{1}{2}>0$ であるから，漸化式より $a_2>0$，$a_3>0$，……，$a_n>0$

ゆえに，漸化式の両辺の逆数をとると $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+2$

よって $b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=3$

ゆえに，数列 $\{b_n+1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから　$b_n+1=3\cdot 3^{n-1}$

したがって　$b_n=3^n-1$

$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3^n-1}$

よって　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$

(3)　与えられた漸化式を変形して

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$，$a_{n+2}+\frac{3}{4}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n=a_2+\frac{3}{4}a_1=1$

辺々引いて　$-\frac{7}{4}a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1$

よって　$a_n=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$　　ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{4}{7}$

5

別解　(1)　$a_n=\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}+\frac{4}{9}$　　(2)　$\frac{4}{9}$

解説

(1)　$(n+1)$ 回繰り返した後に A の袋に赤球が入っているのは

[1]　n 回後に A の袋に赤球があり，$(n+1)$ 回目に A の袋から黒球が出る

[2]　n 回後に B の袋に赤球があり，$(n+1)$ 回目に B の袋から赤球が出る

のいずれかであり，[1]，[2] は互いに排反であるから

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{3}{4}+(1-a_n)\cdot\frac{1}{5}=\frac{11}{20}a_n+\frac{1}{5}$$

$a_{n+1}=\frac{11}{20}a_n+\frac{1}{5}$ を変形すると　$a_{n+1}-\frac{4}{9}=\frac{11}{20}\left(a_n-\frac{4}{9}\right)$

数列 $\left\{a_n-\frac{4}{9}\right\}$ は，初項 $a_1-\frac{4}{9}=\frac{3}{4}-\frac{4}{9}=\frac{11}{36}$，公比 $\frac{11}{20}$ の等比数列であるから

$a_n-\frac{4}{9}=\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}$　　よって　$a_n=\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}+\frac{4}{9}$

(2)　$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{11}{36}\left(\frac{11}{20}\right)^{n-1}+\frac{4}{9}\right\}=\frac{4}{9}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　3

解説

(1)　$0<a_n<3$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき，与えられた条件から ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると　$0<a_k<3$

$n=k+1$ のときを考えると，$0<a_k<3$ であるから

$a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}>2>0$，$a_{k+1}=1+\sqrt{1+a_k}<1+\sqrt{1+3}=3$

したがって　$0<a_{k+1}<3$

よって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2)　$3-a_{n+1}=2-\sqrt{1+a_n}=\frac{3-a_n}{2+\sqrt{1+a_n}}<\frac{1}{3}(3-a_n)$

(3)　(1)，(2) から　$0<3-a_n\leqq\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-a_1)=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n=3$

1

解答　(1)　(ア)　-1　　(イ)　$0<r<3$ のとき -9，$r=3$ のとき -2，$3<r$ のとき $\frac{1}{r}$

(2)　$0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi$

解説

(1)　(ア)　$0<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき　$\frac{\sin^n\theta-\cos^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}=\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n-1}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^n+1}=\frac{\tan^n\theta-1}{\tan^n\theta+1}$

このとき，$0<\tan\theta<1$ であるから　(与式)$=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(イ)　[1]　$0<r<3$ のとき　$0<\frac{r}{3}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}-3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0-3}{0+\frac{1}{3}}=-9$$

[2]　$r=3$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-3^{n+1}}{3^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8\cdot 3^{n-1}}{4\cdot 3^{n-1}}=-2$

[3]　$3<r$ のとき　$0<\frac{3}{r}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-3^{n+1}}{r^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-9\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}{r+\left(\frac{3}{r}\right)^{n-1}}=\frac{1-9\cdot 0}{r+0}=\frac{1}{r}$$

(2)　収束するための条件は　$-1<4\sin^2\theta+2\cos\theta-3\leqq1$

$\cos\theta=x$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$-1\leqq x\leqq1$ …… ①

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ であるから　$-1<4(1-x^2)+2x-3\leqq1$

整理して　$-1<-4x^2+2x+1\leqq1$

$-1<-4x^2+2x+1$ から　$2x^2-x-1<0$

ゆえに　$(2x+1)(x-1)<0$　　よって　$-\frac{1}{2}<x<1$ …… ②

$-4x^2+2x+1\leqq1$ から　$2x^2-x\geqq0$

ゆえに　$x(2x-1)\geqq0$　　よって　$x\leqq0$，$\frac{1}{2}\leqq x$ …… ③

①，②，③ の共通範囲をとって　$-\frac{1}{2}<x\leqq0$，$\frac{1}{2}\leqq x<1$

すなわち　$-\frac{1}{2}<\cos\theta\leqq0$，$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから，$-\frac{1}{2}<\cos\theta\leqq0$ より　$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi$

$\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$ より　$0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$

よって，求める θ の値の範囲は　$0<\theta\leqq\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}\leqq\theta<\frac{2}{3}\pi$

2

解答　(1)　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$

(2)　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき 0 に収束，　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき 1 に収束，

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき 正の無限大に発散，

$-\frac{\pi}{2}<\theta\leqq-\frac{\pi}{4}$ のとき 振動する（極限はない）

(3)　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき -1；　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき 0；

$-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき 1

解説

(1)　$|\tan\theta|<1$ から　$-1<\tan\theta<1$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で，これを解くと　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$

(2)　[1]　$|\tan\theta|<1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=0$

よって，$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき，0 に収束する。

[2]　$\tan\theta=1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=1$

よって，$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，1 に収束する。

[3]　$\tan\theta>1$ のとき　$\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=\infty$

よって，$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，正の無限大に発散する。

[4]　$\tan\theta\leqq-1$　すなわち $-\frac{\pi}{2}<\theta\leqq-\frac{\pi}{4}$ のとき，

数列 $\{\tan^n\theta\}$ は振動する。（極限はない）

(3)　[1]　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\tan^n\theta=0$ であるから

$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta}-1}{\dfrac{\sin^n\theta}{\cos^n\theta}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^n\theta-1}{\tan^n\theta+1}=-1$$

[2]　$\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\theta=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから　$(与式)=\lim_{n\to\infty}0=0$

[3]　$-\frac{\pi}{2}<\theta<-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$|\tan\theta|>1$ であるから　$\left|\frac{1}{\tan\theta}\right|<1$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tan^n\theta}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^n=0$

したがって　$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}}{1+\dfrac{\cos^n\theta}{\sin^n\theta}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{\tan^n\theta}}{1+\dfrac{1}{\tan^n\theta}}=1$$

3

解答　(1) 略　(2) $b_n=2\cdot3^{n-1}-1$　(3) 2

解説

(1)　$a_n>2$ …… ① が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=3$ であるから ① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき

① が成り立つ，すなわち $a_k>2$ …… ② と仮定する。

$$a_{k+1}-2=\frac{5a_k-4}{2a_k-1}-2=\frac{a_k-2}{2a_k-1}$$

② から　$a_k-2>0$，$2a_k-1>3>0$

よって　$a_{k+1}-2>0$　　すなわち　$a_{k+1}>2$

ゆえに，① は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n に対し，① が成り立つ。

(2)　$a_{n+1}=\frac{5a_n-4}{2a_n-1}$ から

$$a_{n+1}-2=\frac{5a_n-4}{2a_n-1}-2=\frac{a_n-2}{2a_n-1}\quad\cdots\cdots ③$$

(1) より，すべての自然数 n に対して $a_n>2$ であるから，③ の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{2a_n-1}{a_n-2}$$

すなわち　$\frac{1}{a_{n+1}-2}=2+\frac{3}{a_n-2}$

$b_n=\frac{1}{a_n-2}$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+2$

変形すると　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また，$b_1=\frac{1}{a_1-2}=\frac{1}{3-2}=1$ であるから，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=2$，公比 3 の等比数列である。

よって　$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$　　ゆえに　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

(3)　(2) から　$a_n=\frac{1}{b_n}+2=\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}+2$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}+2\right)=2$

4

解答　(1) $b_n=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$　(2) $\frac{5}{2}$

解説

(1)　$b_n=\frac{1}{5}a_n+1$ …… ①，$a_{n+1}=3b_n+2$ …… ② とする。

① から　$b_1=\frac{1}{5}a_1+1=\frac{1}{5}\cdot0+1=1$

また　$a_n=5b_n-5$　　ゆえに　$a_{n+1}=5b_{n+1}-5$

これを ② に代入して　$5b_{n+1}-5=3b_n+2$

よって　$b_{n+1}=\frac{3}{5}b_n+\frac{7}{5}$　　変形すると　$b_{n+1}-\frac{7}{2}=\frac{3}{5}\left(b_n-\frac{7}{2}\right)$

ゆえに，数列 $\left\{b_n-\frac{7}{2}\right\}$ は初項 $b_1-\frac{7}{2}=-\frac{5}{2}$，公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列であるから

$b_n-\frac{7}{2}=-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$　　よって　$b_n=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

(2)　$$b_{n+1}-b_n=\left\{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}-\left\{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(-\frac{3}{5}+1\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$b_{2n}-b_n=\left\{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{2n-1}\right\}-\left\{\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left\{-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{2n}-b_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left\{-\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}=\frac{5}{2}$$

5

解答　略

解説

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n+\frac{4}{5}y_n$ …… ①，$y_{n+1}=\frac{3}{4}x_n+\frac{1}{5}y_n$ …… ②

①＋② から　$x_{n+1}+y_{n+1}=x_n+y_n$　　$P_1(1,\ 1)$ から　$x_1+y_1=2$

よって　$x_n+y_n=x_{n-1}+y_{n-1}=\cdots\cdots=x_1+y_1=2$　　ゆえに　$y_n=2-x_n$

これを ① に代入して整理すると　$x_{n+1}=-\frac{11}{20}x_n+\frac{8}{5}$

変形すると　$x_{n+1}-\frac{32}{31}=-\frac{11}{20}\left(x_n-\frac{32}{31}\right)$　　また　$x_1-\frac{32}{31}=-\frac{1}{31}$

ゆえに　$x_n-\frac{32}{31}=-\frac{1}{31}\left(-\frac{11}{20}\right)^{n-1}$

よって　$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{32}{31}-\frac{1}{31}\left(-\frac{11}{20}\right)^{n-1}\right\}=\frac{32}{31}$

また　$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(2-x_n)=2-\frac{32}{31}=\frac{30}{31}$

したがって，点列 P_1，P_2，…… は定点 $\left(\frac{32}{31},\ \frac{30}{31}\right)$ に限りなく近づく。

6

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 2

解説

(1)　すべての自然数 n について　$a_n>2$ …… ①　が成り立つことを数学的帰納法によって証明する。

[1]　$n=1$ のとき

条件より，$a_1=3$ であるから，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つ，すなわち $a_k>2$ が成り立つと仮定すると，

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}-2=\left(3-\frac{2}{a_k}\right)-2=1-\frac{2}{a_k}=\frac{a_k-2}{a_k}>0$

よって　$a_{k+1}>2$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

(2)　(1) から　$a_{n+1}-2>0$ …… ②

また　$$\frac{1}{2}(a_n-2)-(a_{n+1}-2)=\frac{1}{2}(a_n-2)-\left(1-\frac{2}{a_n}\right)=\frac{a_n}{2}+\frac{2}{a_n}-2$$
$$=\frac{a_n{}^2-4a_n+4}{2a_n}=\frac{(a_n-2)^2}{2a_n}>0$$

すなわち　$\frac{1}{2}(a_n-2)>a_{n+1}-2$ …… ③

②，③ から　$0<a_{n+1}-2<\frac{1}{2}(a_n-2)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(3)　(1)，(2) から　$0<a_n-2<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

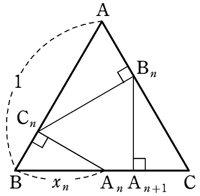
したがって　$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

$\boxed{1}$

解答　(1)　$x_{n+1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{x_n}{8}$　　(2)　$\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{BC}_n$ において　$\mathrm{BC}_n=\dfrac{x_n}{2}$



$\mathrm{AC}_n=1-\mathrm{BC}_n$ であるから　$\mathrm{AC}_n=1-\dfrac{x_n}{2}$

$\triangle \mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n$ において　$\mathrm{AB}_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{x_n}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{x_n}{4}$

$\mathrm{CB}_n=1-\mathrm{AB}_n=1-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{x_n}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x_n}{4}$

$\triangle \mathrm{B}_n\mathrm{CA}_{n+1}$ において　$\mathrm{CA}_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{x_n}{4}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{x_n}{8}$

ゆえに　$x_{n+1}=\mathrm{BA}_{n+1}=1-\mathrm{CA}_{n+1}=1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{x_n}{8}\right)$

したがって　$x_{n+1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{x_n}{8}$

(2)　$x_{n+1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{x_n}{8}$ を変形すると　$x_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{8}\left(x_n-\dfrac{2}{3}\right)$

よって，数列 $\left\{x_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は初項 $x_1-\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であり

$$x_n-\frac{2}{3}=\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\frac{2}{3}\right)$$

ゆえに　$x_n=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}\left(x_1-\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{2}{3}$　　よって　$\lim_{n\to\infty} x_n=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{2}$

解答　1

解説

$(n+1)$ 年目の都外の人口は

n 年目に都外に住み，$(n+1)$ 年目に都内に移住しない人　と

n 年目に都内に住み，$(n+1)$ 年目に都外に移住する人

の数の合計になるから　$a_{n+1}=a_n\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+b_n\cdot\dfrac{1}{3}$

すなわち　$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$　…… ①

同様にして　$b_{n+1}=a_n\cdot\dfrac{1}{3}+b_n\cdot\left(1-\dfrac{1}{3}\right)$

すなわち　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{2}{3}b_n$　…… ②

①＋② から　$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$

よって　$a_n+b_n=a_1+b_1$　…… ③

①－② から　$a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{3}(a_n-b_n)$

よって　$a_n-b_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)$　…… ④

(③＋④)÷2 から　$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}$

(③－④)÷2 から　$b_n=\dfrac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}$

よって　$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}}{\dfrac{1}{2}\left\{(a_1+b_1)-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}(a_1-b_1)\right\}}=1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(2)　$b_n=\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$　　(3)　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{n+1}}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(4)　$\lim_{n\to\infty} a_n=\dfrac{2}{7}$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\dfrac{3}{7}$，$\lim_{n\to\infty} c_n=\dfrac{2}{7}$

解説

(1)　時刻 $n+1$ に点 P が頂点 A にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ でとどまる。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 B にいる場合は，次の 3 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ でとどまる。

[3]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

よって　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 C にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ でとどまる。

よって　$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(2)　$a_n+b_n+c_n=1$ から　$a_n+c_n=1-b_n$

よって，(1) から　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}(1-b_n)=-\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{1}{2}$

この漸化式を変形すると　$b_{n+1}-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{3}{7}\right)$

ここで，時刻 0 に点 P は頂点 A にいるから　$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

よって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{7}\right\}$ は，初項 $b_0-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{3}{7}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって　$b_n=\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

注 $n=0$ から考えているため，b_n は $n+1$ 番目の項となる。

(3)　(2) から　$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}$

よって　$p_{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+\frac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=p_n+\frac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$p_0=2^0\cdot a_0=1$ より，$n\geqq 1$ のとき

$$p_n=p_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{7}\left\{2^k-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}=1+\frac{2}{7}\left\{\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots\cdots ①$$

$n=0$ のとき　$\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}=1$

$p_0=1$ であるから，① は $n=0$ のときも成り立つ。

よって　$p_n=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4)　(3) から　$a_n=\frac{p_n}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

よって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{2}{7}$

(2) から　$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{7}$

$c_n=1-a_n-b_n$ から　$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(1-a_n-b_n)=1-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$

4

解答　(1)　$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$　(2)　略　(3)　証明略，$\sqrt{3}$

解説

(1)　$f(x)=x^2-3$ から　$f'(x)=2x$

よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_n,\ {a_n}^2-3)$ における接線の方程式は

$y-({a_n}^2-3)=2a_n(x-a_n)$　すなわち　$y=2a_nx-{a_n}^2-3$

この接線と x 軸とが交わる点の x 座標が a_{n+1} であるから

$0=2a_na_{n+1}-{a_n}^2-3$

すなわち　$2a_na_{n+1}={a_n}^2+3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　$\cdots\cdots$ ①

ここで，$a_1=2>0$ であり，① より，$a_n>0$ ならば $a_{n+1}>0$ が成り立つ。

ゆえに，すべての自然数 n に対して $a_n>0$ が成り立つから，① の両辺を $2a_n\ (\neq 0)$ で割ると　$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{3}{a_n}\right)$

(2)　すべての自然数 n に対して $a_n>\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ② であることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=2>\sqrt{3}$ であるから，$n=1$ のとき ② は成り立つ。

[2]　$n=k$ (k は自然数) のとき，② が成り立つと仮定すると

$a_k>\sqrt{3}$

$n=k+1$ のとき　$a_{k+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(a_k+\frac{3}{a_k}\right)-\sqrt{3}=\frac{1}{2a_k}({a_k}^2-2\sqrt{3}a_k+3)$

$$=\frac{1}{2a_k}(a_k-\sqrt{3})^2>0$$

よって，$n=k+1$ のときにも，② が成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n に対して，$a_n>\sqrt{3}$ が成り立つ。

(3)　(2) より　$a_{n+1}-\sqrt{3}=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{3})^2=\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})\cdot\frac{a_n-\sqrt{3}}{a_n}$

$a_n-\sqrt{3}>0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であるから　$0<\frac{a_n-\sqrt{3}}{a_n}<1$

よって　$0<a_{n+1}-\sqrt{3}<\frac{1}{2}(a_n-\sqrt{3})$

ゆえに　$0<a_n-\sqrt{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_1-\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(2-\sqrt{3})=0$ であるから，はさみうちの原理により

$\lim_{n\to\infty}(a_n-\sqrt{3})=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{3}$

1

解答　(1)　収束し，その和は $\frac{3}{4}$　(2)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

よって　$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)$

$+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\frac{3}{4}$ である。

(2)　第 n 項は　$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

よって　$S_n=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

2

解答　(1)　発散　(2)　収束，$\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$

解説

公比を r とする。

(1)　初項は $2-\sqrt{3}$ であり，公比は

$$r=\frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$$

$|r|>1$ であるから，この無限等比級数は発散する。

(2)　初項は $3+\sqrt{2}$ であり，公比は

$$r=\frac{-(2\sqrt{2}-1)}{3+\sqrt{2}}=\frac{-(2\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=1-\sqrt{2}$$

$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{3+\sqrt{2}}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$$

3

解答　$\frac{9}{4}$

解説

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$ の公比は，それぞれ $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$ で公比の絶対値が 1 より小さいから，これらはともに収束する。

よって，求める和 S は

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$$

$\boxed{4}$

解答　$\dfrac{53}{110}$

解説

$$0.4\dot{8}\dot{1}=0.4+0.081+0.00081+0.0000081+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^5}+\frac{81}{10^7}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{\frac{81}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{4}{10}+\frac{9}{110}=\frac{53}{110}$$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$，和 $\dfrac{1}{1-3x}$　　(2)　$x=0$，$2<x<4$；和 $\dfrac{x}{x-2}$

解説

(1)　初項が 1，公比が $3x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$-1<3x<1$　すなわち　$-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{3}$

このときの和は　$\dfrac{1}{1-3x}$

(2)　初項が x，公比が $3-x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$x=0$　または　$-1<3-x<1$

$-1<3-x<1$ より　$2<x<4$

よって，求める x の値の範囲は　$x=0$，$2<x<4$

$x=0$ のとき，和は　0

$2<x<4$ のとき，和は　$\dfrac{x}{1-(3-x)}=\dfrac{x}{x-2}$

これは，$x=0$ のときも成り立つ。

よって，求める和は　$\dfrac{x}{x-2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　$a_n=\dfrac{2n+1}{2n}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1\neq0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

別解　第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\cdots\cdots+\frac{2n+1}{2n}$$

$$>1+1+1+\cdots\cdots+1=n$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n=\infty$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，与えられた無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　$a_n=\cos n\pi$

ここで　n が奇数のとき　$\cos n\pi=-1$

　　　　n が偶数のとき　$\cos n\pi=1$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

$\boxed{7}$

解答　(1)　$S_{2n-1}=1$，$S_{2n}=1-\dfrac{1}{n+1}$　　(2)　収束，和 1

解説

(1)　$S_{2n-1}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\cdots\cdots-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}$

$$=1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\cdots\cdots-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=1$$

$$S_{2n}=S_{2n-1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

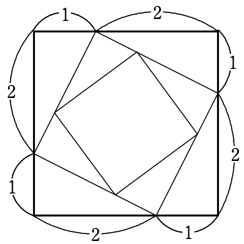
(2)　(1) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$

したがって，無限級数 ① は収束して，その和は 1

$\boxed{8}$

図のように，1 辺の長さ 1 の正方形の各辺を 2：1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_1 とする。同様に，新しくできた正方形の 4 辺を 2：1 に内分する 4 点を結んでできる正方形の面積を S_2 とする。以下同様に，この操作を無限に続けて得られるすべての正方形の面積の総和 $S=S_1+S_2+\cdots\cdots$ を求めよ。



解答　$S=\dfrac{5}{4}$

解説

面積 S_n の正方形の一辺の長さを l とすると

$$S_n:S_{n+1}=l^2:\left\{\left(\frac{2}{3}l\right)^2+\left(\frac{1}{3}l\right)^2\right\}$$

$$=l^2:\frac{5}{9}l^2=1:\frac{5}{9}$$

よって　$S_{n+1}=\dfrac{5}{9}S_n$

もとの正方形の面積は 1 であるから　$S_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

したがって，求める面積の総和 S は，初項 $\dfrac{5}{9}$，公比 $\dfrac{5}{9}$ $\left(\left|\dfrac{5}{9}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され

$$S=\frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}}=\frac{5}{4}$$

$\boxed{9}$

解答　$\dfrac{27}{32}\pi$

解説

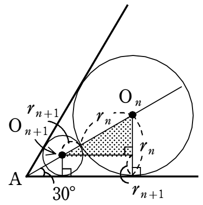
円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とすると右の図から

$$(r_n+r_{n+1})\sin 30^\circ=r_n-r_{n+1}$$

よって　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$　　したがって　$S_{n+1}=\dfrac{1}{9}S_n$

また，$r_1=\dfrac{3}{2}\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから　$S_1=\dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに，円の面積の総和は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{3}{4}\pi}{1-\frac{1}{9}}=\frac{27}{32}\pi$



1

解答　(1)　収束，和 $\dfrac{1}{3}$　　(2)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　第 n 項は　$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$

よって　$S_n=\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\dfrac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1})(\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1})}$

$$=\frac{\sqrt{3n-2}-\sqrt{3n+1}}{(3n-2)-(3n+1)}=\frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$$

よって　$S_n=\dfrac{2-1}{3}+\dfrac{\sqrt{7}-2}{3}+\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$

$$=\frac{\sqrt{3n+1}-1}{3}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+1}-1}{3}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

2

解答　(1)　収束，$\dfrac{4}{3}$　　(2)　収束，$\dfrac{5}{8}$　　(3)　発散　　(4)　発散　　(5)　収束，$6+4\sqrt{3}$

解説

公比を r とする。

(1)　初項は 1，公比は $r=\dfrac{1}{4}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

(2)　初項は 1，公比は $r=-\dfrac{3}{5}$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{8}$$

(3)　初項は 1，公比は $r=-\sqrt{5}$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(4)　初項は 3，公比は $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で　$|r|>1$

よって，この無限等比級数は発散する。

(5)　初項は $2\sqrt{3}$，公比は $r=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$ で　$|r|<1$

よって，この無限等比級数は収束し，その和 S は

$$S=\frac{2\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=6+4\sqrt{3}$$

3

解答　(1)　3　　(2)　$-\dfrac{2}{3}$

解説

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の無限等比級数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}$ は初項 2，公比 $\dfrac{1}{5}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから，この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^{n-1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{2}{1-\frac{1}{5}}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{5}{4^n}\right\}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ は初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の無限等比級数で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}$ は初項 $\dfrac{5}{4}$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから，この 2 つの無限等比級数はともに収束する。

よって　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-5}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$$=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$$

4

解答　(1)　$\dfrac{5}{9}$　　(2)　$\dfrac{29}{55}$　　(3)　$\dfrac{878}{1665}$

解説

(1)　$0.\dot{5}=0.5+0.05+0.005+\cdots\cdots=\dfrac{5}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{5}{10^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{5}{9}$$

(2)　$0.5\dot{2}\dot{7}=0.5+0.027+0.00027+0.0000027+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}+\frac{27}{10^3}+\frac{27}{10^5}+\frac{27}{10^7}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{27}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{2}+\frac{27}{990}=\frac{29}{55}$$

(3)　$0.5\dot{2}7\dot{3}=0.5+0.0273+0.0000273+0.0000000273+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{2}+\frac{273}{10^4}+\frac{273}{10^7}+\frac{273}{10^{10}}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\frac{273}{10^4}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{1}{2}+\frac{91}{3330}=\frac{878}{1665}$$

5

解答　(1)　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$；和は $\dfrac{3}{1-2x}$　　(2)　$-1<x<1$，$x=3$；和は $\dfrac{3-x}{1-x}$

(3)　$-1<x\leqq 0$，$1<x<2$；和は $-\dfrac{x}{x^2-x-2}$

解説

(1)　初項が 3，公比が $2x$ であるから，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は　$-1<2x<1$　すなわち　$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$

このときの和は　$\dfrac{3}{1-2x}$

(2)　この無限等比級数の初項は $3-x$，公比 x である。

この無限等比級数が収束するための条件は

$3-x=0$　または　$|x|<1$　　ゆえに　$-1<x<1$，$x=3$

$x=3$ のとき，和は 0

$-1<x<1$ のとき，和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$　これは $x=3$ の場合も含む。

したがって，求める和は　$\dfrac{3-x}{1-x}$

(3)　この無限等比級数の初項は x，公比は x^2-x-1 である。

よって，この無限等比級数が収束するための必要十分条件は

$x=0$　または　$-1<x^2-x-1<1$

$-1<x^2-x-1$ から　$x^2-x>0$　　ゆえに　$x<0$，$1<x$　……①

$x^2-x-1<1$ から　$x^2-x-2<0$

これを解くと　$(x-2)(x+1)<0$ から　$-1<x<2$　……②

①，② の共通範囲を求めて　$-1<x<0$，$1<x<2$

したがって，求める x の値の範囲は　$-1<x\leqq 0$，$1<x<2$

このとき，和は　$\dfrac{x}{1-(x^2-x-1)}=-\dfrac{x}{x^2-x-2}$

6

解答　(1)　略　　(2)　略

解説

(1)　第 n 項 a_n は　$a_n=\dfrac{n}{2n-1}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$

ゆえに，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

別解　第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots\cdots+\frac{n}{2n-1}$$

$$>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2}=\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$

よって，与えられた無限級数は発散する。

(2)　第 n 項 a_n は　$a_n=\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi$

ここで　n が奇数のとき　$\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi=1$

n が偶数のとき　$\sin\dfrac{2n-1}{2}\pi=-1$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は振動する。

すなわち，数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないから，与えられた無限級数は発散する。

7

解答　(1)　発散　(2)　収束，$\dfrac{5}{2}$

解説

(1)　第 n 項までの部分和を S_n とすると　$S_{2n-1}=\dfrac{2}{3}$

また　$S_{2n}=S_{2n-1}+\left(-\dfrac{2n+2}{2n+3}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2n+2}{2n+3}$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\dfrac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2+\frac{2}{n}}{2+\frac{3}{n}}\right)=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，無限級数は発散する。

別解　第 n 項を a_n とすると　$a_{2n}=-\dfrac{2n+2}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=-1$ から，数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束しない。

したがって，この無限級数は発散する。

(2)　第 n 項までの部分和を S_n とする。

この無限級数の第 $(2n-1)$ 項は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，第 $2n$ 項は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であるから

$$S_{2n}=\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}+\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_{2n-1}=S_{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$，$\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-0=\dfrac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\dfrac{5}{2}$ であるから，無限級数は収束し，和は　$\dfrac{5}{2}$

8

解答　$\dfrac{32}{3}$

解説

$\triangle A_nBA_{n+1}$ の面積を S_n とする。

$\triangle A_nBA_{n+1}\backsim\triangle A_{n+1}BA_{n+2}$ で，相似比は　$A_nA_{n+1}:A_{n+1}A_{n+2}=5:4$

ゆえに　$S_n:S_{n+1}=5^2:4^2$　すなわち　$S_{n+1}=\dfrac{16}{25}S_n$

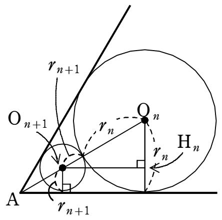
よって，求める面積の総和 S は，初項 $S_1=\dfrac{16}{25}\cdot 6=\dfrac{96}{25}$，公比 $\dfrac{16}{25}$ $\left(\left|\dfrac{16}{25}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され　$S=\dfrac{\frac{96}{25}}{1-\frac{16}{25}}=\dfrac{32}{3}$

9

解答　$\dfrac{3}{32}\pi$

解説

円 O_n の半径を r_n，面積を S_n とし，点 O_{n+1} を通り辺 AB に平行な直線と点 O_n から AB に下ろした垂線との交点を H_n とする。



$\triangle O_nO_{n+1}H_n$ において，$\angle O_nO_{n+1}H_n=30°$ であるから

$O_nO_{n+1}\sin 30°=O_nH_n$

すなわち　$(r_n+r_{n+1})\cdot\dfrac{1}{2}=r_n-r_{n+1}$

よって　$r_{n+1}=\dfrac{1}{3}r_n$

したがって，円 O_n と円 O_{n+1} の面積比は $9:1$ であるから　$S_{n+1}=\dfrac{1}{9}S_n$

また，$r_1=\dfrac{1}{2}\tan 30°=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ であるから　$S_1=\dfrac{\pi}{12}$

ゆえに，円の面積の総和は，初項 $\dfrac{\pi}{12}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ $\left(\left|\dfrac{1}{9}\right|<1\right)$ の無限等比級数の和で表され

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{12}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{32}\pi$$

1

解答　$\dfrac{3}{2}$

解説

初項を a，公比を r とする。

$a=0$ のとき，条件を満たさないから　$a\neq 0$

また，無限等比級数の和があるから　$|r|<1$

条件から　$\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{ar}{1-r^2}+1$　……①，　$\dfrac{a^2}{1-r^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{1-r}$　……②

① の両辺に $1-r^2$ を掛けると　$a(1+r)=ar+1-r^2$

よって　$a=1-r^2$　……③

② の両辺に $2(1-r^2)$ を掛けると　$2a^2=a(1+r)$

$a\neq 0$ であるから　$2a=1+r$　③ を代入して　$2(1-r^2)=1+r$

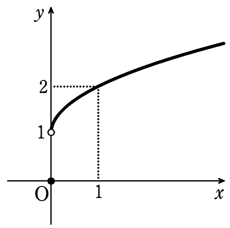
整理すると　$2r^2+r-1=0$　すなわち　$(r+1)(2r-1)=0$

$|r|<1$ から　$r=\dfrac{1}{2}$　③ に代入して　$a=\dfrac{3}{4}$　($a\neq 0$ を満たす)

よって，もとの級数の和は　$\dfrac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}$

2

解答　〔図〕



解説

関数 $f(x)$ の定義域は $x\geqq 0$ で，この無限等比級数の初項は $\sqrt{x}$，公比は $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ である。

[1]　$x=0$ のとき，この無限等比級数は収束し，その和は 0 である。

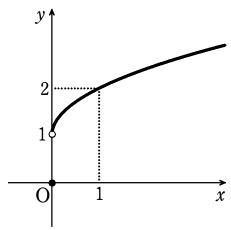
[2]　$x>0$ のとき，$0<\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}<1$ であるから，

この無限等比級数は収束し，その和は

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\frac{1}{1+\sqrt{x}}}=\sqrt{x}+1$$

よって　$\begin{cases}x=0 \text{ のとき } f(x)=0\\ x>0 \text{ のとき } f(x)=\sqrt{x}+1\end{cases}$

したがって，関数 $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$\boxed{3}$

解答　(1)　収束，$-\dfrac{1}{2}$　　(2)　発散する　　(3)　発散する

解説

第 n 項までの部分和を S_n とする。

(1)　$S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}$

ゆえに　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

よって，収束し，その和は　$-\dfrac{1}{2}$

(2)　$S_{2n-1}=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\right)+\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(-\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=\dfrac{1}{2}$

また　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n-1}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{n+1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，発散する。

別解　$a_{2n-1}=\dfrac{n}{n+1}$ から　$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=1\neq0$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

(3)　$S_{2n-1}=2+\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\right)+\left(-\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(-\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{n+1}{n}\right)=2$

よって　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$

また　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_{2n-1}-\dfrac{n+2}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

$=2-1=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ であるから，発散する。

別解　$a_{2n-1}=\dfrac{n+1}{n}$ から　$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=1\neq0$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が 0 に収束しないから無限級数は発散する。

$\boxed{4}$

解答　(1)　$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$　　(2)　$S_n=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$　　(3)　$\dfrac{1}{4}$

解説

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{A}{n(n+1)}+\dfrac{B}{(n+1)(n+2)}$ の両辺に $n(n+1)(n+2)$ を掛けると

$1=A(n+2)+Bn$　　すなわち　$1=(A+B)n+2A$

これがすべての自然数 n について成り立つための条件は　$A+B=0$，$2A=1$

これを解くと　$A=\dfrac{1}{2}$，$B=-\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) から　$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

よって　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{1\cdot2}-\cancel{\dfrac{1}{2\cdot3}}\right)+\left(\cancel{\dfrac{1}{2\cdot3}}-\cancel{\dfrac{1}{3\cdot4}}\right)+\cdots\cdots+\left\{\cancel{\dfrac{1}{n(n+1)}}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$

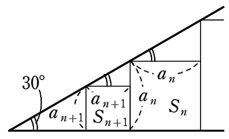
$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$

(3)　$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\right\}=\dfrac{1}{4}$

$\boxed{5}$

解答　$\dfrac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}a^2$

解説



S_n の 1 辺の長さを a_n とすると，図から

$\tan30^\circ=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}$

よって　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1\right)a_{n+1}=a_n$

ゆえに　$a_{n+1}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a_n$

また　$a_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a$

したがって　$a_{n+1}{}^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2a_n{}^2$，$a_1{}^2=\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

S_n の面積は $a_n{}^2$ であるから，すべての正方形の面積の和 S は，初項 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2$，

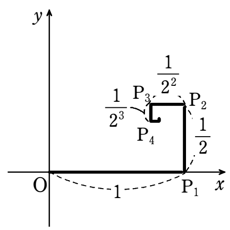
公比 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2$ の無限等比級数の和で表され，$\left|\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right|<1$ であるから

$$S=\frac{\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{1-\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}a^2}{1-\dfrac{6-3\sqrt{3}}{2}}=\frac{6-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4}a^2=\frac{3(2\sqrt{3}-1)}{11}a^2$$

$\boxed{6}$

解答　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

解説



O から x 軸の正の向きに 1 だけ進んだ点を P_1，次に y 軸の正の向きに $\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2，以下順に進んだ点を P_3，P_4，…… とする。

求める点の座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=OP_1-P_2P_3+P_4P_5-\cdots\cdots$

$=1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^4}-\cdots\cdots$

これは，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ $\left(\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1\right)$ の無限等比級数であるから，収束して，その和は　$x=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)}=\dfrac{4}{5}$

また　$y=P_1P_2-P_3P_4+P_5P_6-\cdots\cdots=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^5}-\cdots\cdots$

これは，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $-\dfrac{1}{2^2}$ $\left(\left|-\dfrac{1}{2^2}\right|<1\right)$ の無限等比級数であるから，収束して，その和は　$y=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1-\left(-\dfrac{1}{2^2}\right)}=\dfrac{2}{5}$

よって，求める点の座標は　$\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

1

解答　(1)　$\dfrac{1}{\log_{10}2}$　　(2)　$\dfrac{1}{8}$

解説

(1)　$$\frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}=\frac{\log_{10}\frac{n+1}{n}}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}=\frac{\log_{10}(n+1)-\log_{10}n}{\log_{10}n\log_{10}(n+1)}$$
$$=\frac{1}{\log_{10}n}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log_{10}k\log_{10}(k+1)}$ とすると

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{1}{\log_{10}k}-\frac{1}{\log_{10}(k+1)}\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}3}\right)+\left(\frac{1}{\log_{10}3}-\frac{1}{\log_{10}4}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left\{\frac{1}{\log_{10}n}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}$$

よって，求める無限級数の和 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_{10}2}-\frac{1}{\log_{10}(n+1)}\right\}=\frac{1}{\log_{10}2}$$

(2)　$$\frac{n}{(4n^2-1)^2}=\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(4k^2-1)^2}$ とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}\right)+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{8}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

よって，求める無限級数の和 S は

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left\{1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}=\frac{1}{8}$$

2

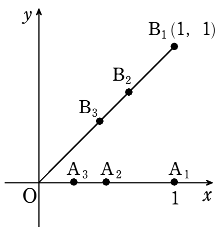
解答　$A_2B_2=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$，和は $\dfrac{29}{15}$

解説

$A_2\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$B_2\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ となるから

$$A_2{B_2}^2=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{4}{9}=\frac{17}{36}$$

よって　　$A_2B_2=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$



また，$A_n(p_n,\ 0)$，$B_n(q_n,\ q_n)$ とおく。

$A_{n+1}(p_{n+1},\ 0)$ は線分 OA_n の中点であり，$B_{n+1}(q_{n+1},\ q_{n+1})$ は線分 OB_n を 2：1 に内分する点であるから　　$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n$ ……①，　$q_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n$ ……②

よって，① より　　$p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}p_1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

② より　　$q_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}q_1=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　　$A_n\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0\right)$，$B_n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1},\ \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$

よって　　$$(a_n)^2=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2+\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}^2$$
$$=\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$=2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

したがって　　$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=2\times\frac{1}{1-\frac{4}{9}}-2\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{18}{5}-3+\frac{4}{3}=\frac{29}{15}$$

3

解答　(1)　$3\cdot4^n$　　(2)　$\dfrac{8}{5}$

解説

(1)　図形 A_n の辺の数を a_n とする。

図形 A_{n-1} のそれぞれ 1 つの辺が 4 つの辺に分かれて図形 A_n ができるから

$$a_n=4\cdot a_{n-1}$$

$a_0=3$ であるから　　$a_n=3\cdot4^n$

(2)　図形 A_{n-1} の外側につけ加える正三角形の 1 つの面積は，正三角形の 1 辺の長さが A_{n-1} の 1 辺の長さの $\dfrac{1}{3}$ であるから　　$\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}^nS_0=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot1=\left(\dfrac{1}{9}\right)^n$

また，図形 A_{n-1} の外側につけ加える正三角形の数は a_{n-1} であるから，$n\geqq1$ のとき　　$S_n=S_{n-1}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot a_{n-1}=S_{n-1}+\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\cdot3\cdot4^{n-1}=S_{n-1}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$

したがって　　$$S_n=S_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

よって　　$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}=\frac{8}{5}$$

4

解答　(1)　$\triangle P_nR_{n+1}Q_{n+1}=t(1-t)a_n$，$a_{n+1}=(3t^2-3t+1)a_n$

(2)　$S=\dfrac{a_1}{-3t^2+3t}$　　(3)　$t=\dfrac{1}{2}$，$S=\dfrac{4}{3}$

解説

(1)　$$\triangle P_nR_{n+1}Q_{n+1}=\triangle P_nQ_nR_n\times\frac{P_nR_{n+1}}{P_nQ_n}\times\frac{P_nQ_{n+1}}{P_nR_n}=t(1-t)a_n$$

同様に考えると　　$\triangle Q_nP_{n+1}R_{n+1}=t(1-t)a_n$
$\triangle R_nQ_{n+1}P_{n+1}=t(1-t)a_n$

したがって　　$$a_{n+1}=a_n-(\triangle P_nR_{n+1}Q_{n+1}+\triangle Q_nP_{n+1}R_{n+1}+\triangle R_nQ_{n+1}P_{n+1})$$
$$=a_n-3t(1-t)a_n=(3t^2-3t+1)a_n$$

(2)　(1) から，数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 $3t^2-3t+1$ の等比数列である。

公比について　　$3t^2-3t+1=3\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

$0<t<1$ であるから　　$\dfrac{1}{4}\leqq3t^2-3t+1<1$

よって，無限等比級数 $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し，その和は

$$S=\frac{a_1}{1-(3t^2-3t+1)}=\frac{a_1}{-3t^2+3t}$$

(3)　(2) から，$a_1=1$ のとき　　$S=\dfrac{1}{-3t^2+3t}$

$$-3t^2+3t=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$0<t<1$ であるから　　$0<-3t^2+3t\leqq\dfrac{3}{4}$

したがって，S は $t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。

$\boxed{1}$

解答　(1)　-1　　(2)　$-\dfrac{1}{2}$　　(3)　1

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{x-2}+1\right)=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{2+(x-2)}{x-2}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x-2)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

$\boxed{2}$

解答　$a=7$，$b=4$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to3}(x-3)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to3}(\sqrt{3x+a}-b)=0$

よって　$\sqrt{9+a}-b=0$　　すなわち　$b=\sqrt{9+a}$　……①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+a}-b}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{9+a}}{x-3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{(3x+a)-(9+a)}{(x-3)(\sqrt{3x+a}+\sqrt{9+a})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to3}\frac{3}{\sqrt{3x+a}+\sqrt{9+a}}=\frac{3}{2\sqrt{9+a}}$

ゆえに，$\dfrac{3}{2\sqrt{9+a}}=\dfrac{3}{8}$ から　$a=7$

① に代入して　$b=4$

$\boxed{3}$

解答　$a=1$，$b=-3$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2+4x}-ax-b$ とおいて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つとする。

$a\leqq0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

よって　$\displaystyle f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+4x}-ax-b)(\sqrt{x^2+4x}+ax+b)}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(x^2+4x)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2+(4-2ab)x-b^2}{\sqrt{x^2+4x}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(1-a^2)x+(4-2ab)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+a+\dfrac{b}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つには　$1-a^2=0$

$a>0$ から　$a=1$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-2b)-\dfrac{b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1+\dfrac{b}{x}}=2-b$

よって，$2-b=5$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=5$ が成り立つから　$b=-3$

したがって　$a=1$，$b=-3$

$\boxed{4}$

解答　(1)　1　　(2)　-1　　(3)　極限はない

解説

(1)　$x>1$ のとき　$|x-1|=x-1$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+0}1=1$

(2)　$x<1$ のとき　$|x-1|=-(x-1)$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{|x-1|}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}(-1)=-1$

(3)　(1)，(2) から，右側極限と左側極限は一致しない。

よって，極限はない。

$\boxed{5}$

解答　(1)　$-\infty$　　(2)　$-\dfrac{3}{2}$

解説

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{1-\dfrac{2}{x}}=-\infty$

(2)　$x=-t$ とおくと　$t>0$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　1

解説

(1)　$0\leqq|\sin x|\leqq1$ であるから，$x>0$ のとき　$\displaystyle0\leqq\frac{|\sin x|}{x}\leqq\frac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{|\sin x|}{x}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

(2)　$0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq1$ であるから，$x\neq0$ より　$0\leqq\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|=x^2\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

別解　$x\neq0$ のとき，$-1\leqq\sin\dfrac{1}{x}\leqq1$ であるから　$-x^2\leqq x^2\sin\dfrac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

(3)　$[x]\leqq x<[x]+1$ から　$x-1<[x]\leqq x$

よって，$x>0$ のとき　$\dfrac{x-1}{x}<\dfrac{[x]}{x}\leqq1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}=1$

$\boxed{7}$

解答　(1)　e^2　　(2)　1　　(3)　$\dfrac{1}{e^2}$　　(4)　$\dfrac{1}{e}$

解説

(1)　$2x=h$ とおくと　$x\longrightarrow0$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^2=e^2$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log e=1$

(3)　$-\dfrac{2}{x}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-\frac{2}{h}}=\lim_{h\to0}\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(4)　$\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$

$-\dfrac{1}{x+1}=h$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$h\longrightarrow0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{h\to0}(1+h)^{-1-\frac{1}{h}}=\lim_{h\to0}\frac{\left\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\right\}^{-1}}{1+h}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

1

解答　(1) 1　(2) -1　(3) $\sqrt{3}$　(4) $-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+3x^2-2}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+2x-2)}{(x+1)(2x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x-2}{2x-1}=\frac{-3}{-3}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{4}{x}-2\right)=\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\frac{4-2x}{x}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x-2}\cdot\frac{-2(x-2)}{x}\right\}$

$\displaystyle=\frac{-2}{2}=-1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{(2+x)-(4-x)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x})}{2(x-1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{\{(x^2-x+1)-1\}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\{(1+x)-(1-x)\}(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x(\sqrt{x^2-x+1}+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2(\sqrt{x^2-x+1}+1)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

2

解答　(1) $a=-8$，$b=4$　(2) $a=8\sqrt{6}$，$b=48$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2-5x+6)=2^2-5\cdot2+6=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to2}(x^2+ax+12)=0$

よって　$2^2+2a+12=0$　すなわち　$a=-8$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-8x+12}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-3)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\frac{x-6}{x-3}=4$

ゆえに　$a=-8$，$b=4$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+5}-b)=0$

よって　$\sqrt{6}\,a-b=0$　すなわち　$b=\sqrt{6}\,a$　…… ①

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+5}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}a\cdot\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{6}}{x-1}$

$\displaystyle=a\times\lim_{x\to1}\frac{(x+5)-6}{(x-1)(\sqrt{x+5}+\sqrt{6})}$

$\displaystyle=a\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{6}}=\frac{a}{2\sqrt{6}}$

ゆえに，$\dfrac{a}{2\sqrt{6}}=4$ から　$a=8\sqrt{6}$

① に代入して　$b=48$

3

解答　$a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$

解説

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b$ とおいて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つとする。

$a\leqq0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ となるから　$a>0$

$x\longrightarrow\infty$ のときを考えるから，$x>0$ としてよい。

よって　$\displaystyle f(x)=\frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-ax-b)(\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b)}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(x^2-3x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}=\frac{(1-a^2)x^2-(3+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2-3x+1}+ax+b}$

$\displaystyle=\frac{(1-a^2)x-(3+2ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つには　$1-a^2=0$

$a>0$ から　$a=1$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-(3+2b)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}}=-\frac{3+2b}{2}$

よって，$-\dfrac{3+2b}{2}=1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ が成り立つから　$b=-\dfrac{5}{2}$

したがって　$a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$

4

解答　(1) 順に　$-\infty$，∞，極限はない　(2) 順に　∞，∞，∞

(3) 順に　$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}$，極限はない

解説

(1) $x<1$ のとき　$x-1<0$

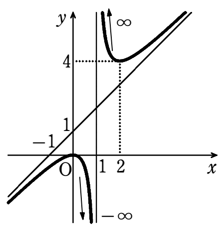
$x\longrightarrow1-0$ のとき　$x^2\longrightarrow1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$

$x>1$ のとき　$x-1>0$

$x\longrightarrow1+0$ のとき　$x^2\longrightarrow1$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x-1}=\infty$



ゆえに，$x\longrightarrow1$ のときの $\dfrac{x^2}{x-1}$ の極限はない。

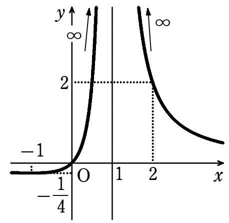
(2) $0<x<1$ のとき　$(x-1)^2>0$，$x>0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$

$x>1$ のとき　$(x-1)^2>0$，$x>0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x}{(x-1)^2}=\infty$



(3) $x<1$ のとき　$x-1<0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{|x-1|}{x^3-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{x^2+x+1}=-\frac{1}{3}$

$x>1$ のとき　$x-1>0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{|x-1|}{x^3-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$

ゆえに，$x\longrightarrow1$ のときの $\dfrac{|x-1|}{x^3-1}$ の極限はない。

5

解答　(1) $-\infty$　(2) -1　(3) $-\dfrac{3}{2}$　(4) $-\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x^2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)=-\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{x}\right)=-1$

(3) $x=-t$ とおくと　$t>0$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$

別解　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}+x)(\sqrt{x^2+3x}-x)}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{-x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}-1}$

$\displaystyle=-\frac{3}{2}$

(4) $x=-t$ とおくと　$t>0$

$x\longrightarrow-\infty$ のとき　$t\longrightarrow\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+1})$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\frac{1}{2}$$

別解　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$$

6

解答　(1)　0　　(2)　0　　(3)　2

解説

(1)　$0\leqq|\cos x|\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき

$$0\leqq\left|\frac{\cos x}{x}\right|=\frac{|\cos x|}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　　$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\cos x}{x}\right|=0$

よって　　$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

別解　$-1\leqq\cos x\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき

$$-\frac{1}{x}\leqq\frac{\cos x}{x}\leqq\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから　　$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$

(2)　$0\leqq\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq 1$ より

$0\leqq|x^2|\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$　　すなわち　$0\leqq\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$

ここで，$\lim_{x\to0}|x^2|=0$ であるから　　$\lim_{x\to0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$

よって　　$\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(3)　$[x]\leqq x<[x]+1$ であるから　　$x-1<[x]\leqq x$

ゆえに　　$2x-1<x+[x]\leqq 2x$

$x>0$ のとき　　$\frac{2x-1}{x+1}<\frac{x+[x]}{x+1}\leqq\frac{2x}{x+1}$

ここで　　$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2$$

よって　　$\lim_{x\to\infty}\frac{x+[x]}{x+1}=2$

7

解答　(1)　$\sqrt{e}$　　(2)　e^3　　(3)　$\frac{1}{e^4}$　　(4)　5

解説

(1)　$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(2)　$\frac{3}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^3=e^3$

(3)　$-x=t$ とおくと　$x\longrightarrow 0$ のとき $t\longrightarrow 0$

よって　　$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{4}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{4}{t}}=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-4}=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

(4)　$\lim_{x\to\infty}x\{\log(x+5)-\log x\}=\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{5}{x}\right)^x$

$\frac{5}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき $t\longrightarrow+0$

よって　　$\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{t\to+0}\log(1+t)^{\frac{5}{t}}=\lim_{t\to+0}\log\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^5=\log e^5=5$

1

解答　(1)　-1　　(2)　2　　(3)　2　　(4)　-1

解説

(1)　$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-5^x}{3^x+5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1}=-1$

(2)　$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x^2-x+1)-\log_2(x^2+2)\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2-x+1}{x^2+2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\log_2 4=2$$

(3)　$\lim_{x\to\infty}x(x-\sqrt{x^2-4})=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})}{x+\sqrt{x^2-4}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\{x^2-(x^2-4)\}}{x+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=2$$

(4)　$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき　　$t\longrightarrow\infty$

したがって

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2+t+1})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t+1)-(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2t}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}$$

$$=-1$$

2

解答　(1)　$\frac{1}{2}$　　(2)　$a=-3$　　(3)　(ア)　$\frac{3}{2}$　　(イ)　-1

解説

(1)　$\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}$

$$=\frac{1}{x^3}\left\{1+2x-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{x^3}\left\{1+2x-\left(1+2x-x^3+\frac{x^4}{4}\right)\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$=\left(-\frac{x}{4}+1\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}+\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)}$$

よって　　$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left\{\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\frac{x^2}{2}\right)\right\}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-(ax+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+1-(ax+1)^2}{x(\sqrt{x^2+1}+ax+1)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x^2-2ax}{x(\sqrt{x^2+1}+ax+1)}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)x-2a}{\sqrt{x^2+1}+ax+1}$

$\displaystyle=\frac{0-2a}{1+0+1}=-a$

よって　$-a=3$　　ゆえに　$a=-3$

(3) (ア) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^xa-2^{-x}}{2^{x+1}-2^{-x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a-\frac{1}{2^{2x}}}{2-\frac{1}{2^{2x+1}}}=\frac{a}{2}$

よって　$\dfrac{a}{2}=\dfrac{3}{4}$　　ゆえに　$a=\dfrac{3}{2}$

(イ) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log_{\frac{3}{2}}(2x)-\log_{\frac{3}{2}}(3x+2)\right\}=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{2}}\frac{2x}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3+\frac{2}{x}}$

$\displaystyle=\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=-1$

$\boxed{3}$

解答　(1) 極限はない　(2) 極限はない　(3) 2

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{x}{(x-2)^3}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{x}{(x-2)^3}=-\infty$

よって，極限はない。

(2) $x>1$　のとき　$\log_{0.5}x<0$

$0<x<1$ のとき　$\log_{0.5}x>0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\log_{0.5}x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{\log_{0.5}x}=\infty$

よって，極限はない。

(3) $\dfrac{3}{2}\leqq x<2$ のとき　$[2x]-[x]=3-1=2$

$2\leqq x<\dfrac{5}{2}$ のとき　$[2x]-[x]=4-2=2$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}([2x]-[x])=2$

$\boxed{4}$

解答　$f(x)=2x^2+14x+24$

解説

[1] から，$f(x)$ は 2 次式である。

[2] から，$f(x)$ は $x+3$ を因数にもつ。

よって，$f(x)=(x+3)(ax+b)$ $(a\neq0)$ とおける。

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(ax+b)}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(a+\frac{b}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}=a$

よって，[1] が成り立つのは，$a=2$ のときである。

($a=2$ は $a\neq0$ を満たす。)

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{f(x)}{x^2+4x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{2x+b}{x+1}=-\frac{b-6}{2}$

よって，$-\dfrac{b-6}{2}=-1$ のとき [2] が成り立つから　$b=8$

したがって　$f(x)=(x+3)(2x+8)=2x^2+14x+24$

$\boxed{5}$

解答　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$c=1$

解説

等式を変形すると　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-a\sin^2x+(3b+2)\sin x-a+b+1}{\sin^3x-a\sin^2x}=c$　……①

この等式において，$\displaystyle\lim_{x\to0}(\sin^3x-a\sin^2x)=0$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}\{-a\sin^2x+(3b+2)\sin x-a+b+1\}=0$　すなわち　$b=a-1$　……②

このとき，①は　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-a\sin x+3a-1}{\sin^2x-a\sin x}=c$　……③

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to0}(\sin^2x-a\sin x)=0$　であるから

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-a\sin x+3a-1)=0$　すなわち　$3a-1=0$

よって　$a=\dfrac{1}{3}$　　②から　$b=-\dfrac{2}{3}$　　このとき，③から　$c=1$

以上から　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{2}{3}$，$c=1$

$\boxed{6}$

解答　(1) 3　(2) ともに 0

解説

(1) 不等式 $[3x]\leqq3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき

$\dfrac{[3x]}{x}\leqq3<\dfrac{[3x]}{x}+\dfrac{1}{x}$ となるから　$3-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[3x]}{x}\leqq3$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2) $x>1$ のとき　$0<\log\sqrt{x}<\sqrt{x}$

すなわち　$0<\dfrac{1}{2}\log x<\sqrt{x}$

ゆえに　$0<\dfrac{\log x}{x}<\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$

次に $x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to+0$ であるから

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+0}(-t\log t)=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$

$\boxed{1}$

解答　1

解説

記号 [ ] の性質から　$\sqrt{x+x^2}-1<[\sqrt{x+x^2}]\leqq\sqrt{x+x^2}$　……①

$x\to\infty$ であるから $x>0$ とする。① から

$\dfrac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{[\sqrt{x+x^2}]-\sqrt{x}}{x}\leqq\dfrac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}$

ここで　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)=1$

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$

$=1-0=1$

したがって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[\sqrt{x+x^2}]-\sqrt{x}}{x}=1$

$\boxed{2}$

解答　(ア) $\sqrt{e}$　　(イ) 3

解説

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}={}^{ア}\sqrt{e}$

また　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n-1)^2\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}=\lim_{n\to\infty}\log\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}^{\frac{4n(n-1)}{3}\cdot\frac{3(2n-1)^2}{4n(n-1)}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log\left[\left\{1+\frac{3}{4n(n-1)}\right\}^{\frac{4n(n-1)}{3}}\right]^{\frac{12-\frac{12}{n}+\frac{3}{n^2}}{4-\frac{4}{n}}}=\log e^{\frac{12}{4}}={}^{イ}3$

$\boxed{3}$

解答　$a=-2p-\dfrac{1}{(p+1)^2}$，$b=p^2+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$，極限値は $1-\dfrac{1}{(p+1)^3}$

解説

$\displaystyle\lim_{x\to p}(x-p)^2=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to p}\{f(x)-g(x)\}=0$ であること，すなわち $f(p)=g(p)$ であることが必要である。

$f(p)=g(p)$ から　$p^2+ap+b=\dfrac{1}{p+1}$

よって　$b=-p^2-ap+\dfrac{1}{p+1}$　……①

また　$f(x)-g(x)=x^2+ax-p^2-ap+\dfrac{1}{p+1}-\dfrac{1}{x+1}$

$=(x+p)(x-p)+a(x-p)+\dfrac{x-p}{(p+1)(x+1)}$

から　$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}=\lim_{x\to p}\frac{x+p+a+\frac{1}{(p+1)(x+1)}}{x-p}$　……②

$\displaystyle\lim_{x\to p}(x-p)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to p}\left\{x+p+a+\frac{1}{(p+1)(x+1)}\right\}=0$ であることが必要条件。

よって　$2p+a+\dfrac{1}{(p+1)^2}=0$　　ゆえに　$a=-2p-\dfrac{1}{(p+1)^2}$　……③

②，③ から　$\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{(x-p)^2}=\lim_{x\to p}\frac{x-p+\frac{1}{(p+1)(x+1)}-\frac{1}{(p+1)^2}}{x-p}$

$$=\lim_{x\to p}\frac{x-p-\dfrac{x-p}{(p+1)^2(x+1)}}{x-p}$$

$$=\lim_{x\to p}\left\{1-\frac{1}{(p+1)^2(x+1)}\right\}=1-\frac{1}{(p+1)^3}$$

①，③ から　$b=-p^2+2p^2+\dfrac{p}{(p+1)^2}+\dfrac{1}{p+1}=p^2+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$

したがって　$a=-2p-\dfrac{1}{(p+1)^2}$，$b=p^2+\dfrac{2p+1}{(p+1)^2}$

このとき，極限値は　$1-\dfrac{1}{(p+1)^3}$

$\boxed{4}$

解答　(1)　$k=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$　　(2)　$S(k)=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1)　$y=x^2+2kx$　……①

$x^2+y^2=1$　……②　とする。

P は 曲線 ② 上にあるから，P の座標は

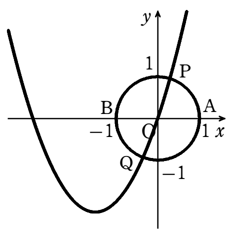
P$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

P は 曲線 ① 上にあるから

$\sin\alpha=\cos^2\alpha+2k\cos\alpha$

$\cos\alpha\fallingdotseq 0$ であるから

$k=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$



(2)　$\overset{\frown}{\mathrm{PBQ}}$ の中心角は　$\angle\mathrm{POQ}=\pi-\alpha+\beta$

ゆえに，B を含む扇形 POQ の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$

直線 OP と放物線 ① で囲まれる部分の面積は

$\displaystyle\int_0^{\cos\alpha}\{\tan\alpha\cdot x-(x^2+2kx)\}dx=\frac{1}{6}\cos^3\alpha$

Q の座標は $(\cos(\pi+\beta),\ \sin(\pi+\beta))$　すなわち　Q$(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$

ゆえに，直線 OQ と放物線 ① で囲まれる部分の面積は

$\displaystyle\int_{-\cos\beta}^{0}\{\tan\beta\cdot x-(x^2+2kx)\}dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$

よって　$S(k)=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3)　(1) の結果から　$k=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$k\longrightarrow\infty$ のとき　$\alpha\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

また，Q は ① 上にあるから　$-\sin\beta=\cos^2\beta-2k\cos\beta$

$\cos\beta\fallingdotseq 0$ であるから　$k=\dfrac{\sin\beta+\cos^2\beta}{2\cos\beta}=\dfrac{1}{2}(\tan\beta+\cos\beta)$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$k\longrightarrow\infty$ のとき　$\beta\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{6}\left(\cos^3\frac{\pi}{2}+\cos^3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$