$\boxed{1}$

解説

(1)　$(a+b+c)^2$ を展開すると

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=13$ であるから

$$1^2=13+2(ab+bc+ca)$$

ゆえに　$ab+bc+ca=\dfrac{1-13}{2}={}^{アイ}-6$

よって　$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$$

$$=2\cdot13-2\cdot(-6)=26+12={}^{ウエ}38$$

(2)　$b-c=x$，$c-a=y$ とおくと

$$x+y=(b-c)+(c-a)=b-a={}^{オカ}-2\sqrt{5}$$

また，(1) の計算から

$$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2$$

$$=38-20={}^{キク}18$$

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ であるから　$(-2\sqrt{5})^2=18+2xy$

ゆえに　$xy=\dfrac{20-18}{2}=1$

よって　$(a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}\,xy={}^{ケ}2\sqrt{5}$

$\boxed{2}$

(解説)

図 1 において，AC＝x，BC＝y とおくと　　$\tan 16° = \dfrac{y}{x}$

図 1 の縮尺は，水平方向が $\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向が $\dfrac{1}{25000}$ であるから，実際の AC，BC の距離は，AC＝$100000x$，BC＝$25000y$ である。

よって　　$\tan \angle BAC = \dfrac{25000y}{100000x} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{4} \tan 16°$

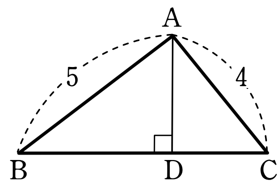
$$\fallingdotseq \frac{1}{4} \times 0.2867 = 0.071675 \fallingdotseq {}^{ア.イウエ}0.072$$

三角比の表により，$\tan 4° = 0.0699$，$\tan 5° = 0.0875$ であるから，$\angle BAC$ の大きさは 4° より大きく 5° より小さい。(^{オ} ②)

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　△ABCにおいて，正弦定理により



$$\frac{4}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2\cdot3$$

よって　$\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{4}{6}=\frac{{}^{ソ}2}{{}^{タ}3}$

したがって　$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=5\cdot\frac{2}{3}=\frac{{}^{チツ}10}{{}^{テ}3}$

(2)　辺ABの長さは外接円の直径より長くなることはないから　$0<\mathrm{AB}\leqq6$　……①

同様に，$0<\mathrm{AC}\leqq6$ であるから　$0<14-2\mathrm{AB}\leqq6$

これを解くと　$4\leqq\mathrm{AB}<7$　……②

①と②の共通範囲を求めて　${}^{ト}4\leqq\mathrm{AB}\leqq{}^{ナ}6$

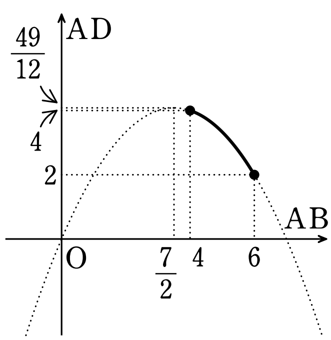
また，△ABCにおいて，正弦定理により　$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=2\cdot3$

よって　$\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABC}=\mathrm{AB}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{6}$

$$=\mathrm{AB}\cdot\frac{14-2\mathrm{AB}}{6}$$

$$=\frac{{}^{ニヌ}-1}{{}^{ネ}3}\mathrm{AB}^2+\frac{{}^{ノ}7}{{}^{ハ}3}\mathrm{AB}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\mathrm{AB}-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{12}$$



$4\leqq\mathrm{AB}\leqq6$ であるから，ADは $\mathrm{AB}=4$ で最大値をとる。

このとき　$\mathrm{AD}=-\frac{1}{3}\cdot4^2+\frac{7}{3}\cdot4=\frac{12}{3}={}^{ヒ}4$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$p=4$，$q=-4$ のとき

① は $x^2+4x-4=0$ となり，その解は　$x=-2\pm2\sqrt{2}$

② は $x^2-4x+4=0$ となり，その解は　$x=2$

よって　$n=$ ア3

また，$p=1$，$q=-2$ のとき

① は $x^2+x-2=0$ となり，その解は　$x=1,\ -2$

② は $x^2-2x+1=0$ となり，その解は　$x=1$

よって　$n=$ イ2

(2)　$n=3$ となるのは，次の [1], [2] のどちらかの場合である。

[1]　① と ② はそれぞれ異なる 2 つの実数解をもち，そのうちの 1 つだけが一致する。

[2]　①，② のうち，一方は異なる 2 つの実数解，他方は重解をもち，それらの 3 つの解が異なる。

[1] の場合

花子さんと太郎さんの会話のように，①，② をともに満たす実数を α とすると，

$\alpha^2-6\alpha+q=0$ かつ $\alpha^2+q\alpha-6=0$ が成り立つ。

α^2 を消去すると　$6\alpha-q=-q\alpha+6$

整理すると　$(q+6)(\alpha-1)=0$

よって　$q=-6$ または $\alpha=1$

(i)　$q=-6$ のとき，2 つの方程式 ①，② は一致する。

よって，不適。

(ii)　$\alpha=1$ のとき　$q=-1^2+6\times1=5$

このとき，① は $x^2-6x+5=0$ となり，その解は　$x=1,\ 5$

② は $x^2+5x-6=0$ となり，その解は　$x=1,\ -6$

よって，$n=3$ となるから，適する。

[2] の場合

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-1\cdot q=9-q,\qquad D_2=q^2-4\cdot1\cdot(-6)=q^2+24$$

$D_2>0$ であるから，② は異なる 2 つの実数解をもつ。

よって，① が重解をもつから　$D_1=0$

ゆえに　$q=9$

このとき，① の重解は　$x=3$

また，② は $x^2+9x-6=0$ となり，$x=3$ は ② の解ではない。

したがって，$n=3$ となり，適する。

以上から　$q=$ ウ5，エ9

(3)　③ を変形すると　$y=(x-3)^2+q-9$

③ のグラフの頂点の座標は　$(3,\ q-9)$

④ を変形すると　$y=\left(x+\dfrac{q}{2}\right)^2-\dfrac{q^2}{4}-6$

④ のグラフの頂点の座標は　$\left(-\dfrac{q}{2},\ -\dfrac{q^2}{4}-6\right)$

よって，q の値を 1 から増加させたとき

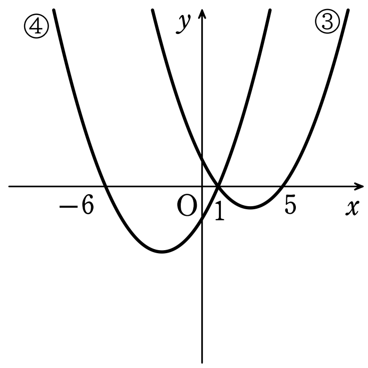
③ のグラフの頂点の x 座標の値は変化せず，y 座標の値は増加する。

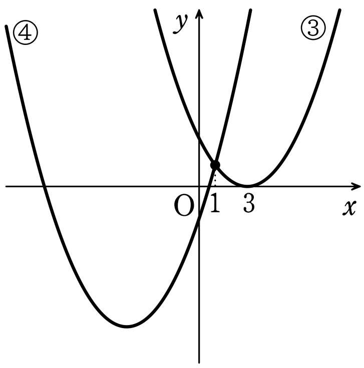
したがって，③ のグラフは上に動く。(オ ⑥)

④ のグラフの頂点の x 座標，y 座標の値はいずれも減少する。

したがって，④ のグラフは左下に動く。(カ ①)

(4)　$q=5$，$q=9$ のときの ③，④ のグラフは，それぞれ次の図のようになる。





(3) で調べたように，$5<q<9$ の範囲においても，

q の値を増加させたとき，③ のグラフは上に，

④ のグラフは左下に動く。

また，③ と ④ のグラフの交点の x 座標は

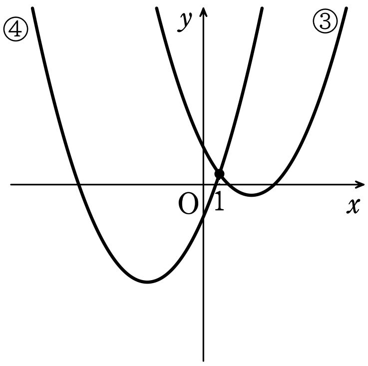
$$x^2-6x+q=x^2+qx-6$$

すなわち　$-(q+6)x=-(q+6)$

$q+6\neq 0$ であるから　　$x=1$

よって，$5<q<9$ のときの ③ と ④ のグラフは

右の図のようになる。



よって，A は ③ のグラフが x 軸の下側にある x の値の範囲，B は ④ のグラフが x 軸の下側にある x の値の範囲であり，A，B に共通部分はない。

また，$\overline{A}$ は ③ のグラフが x 軸の上側にあるか，x 軸と共有点をもつ x の値の範囲である。

よって，$x\in A$ は，$x\in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。(キ ③)

また，命題「$x\in B$ ならば $x\in\overline{A}$」は真である。

一方，命題「$x \in \overline{A}$ ならば $x \in B$」については，偽である。(反例：$x=1$)
したがって，$x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。
(ク ①)

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　(中央値について)

中央値は小さい方から 15 番目の値である。

よって，2009 年度は，30 人以上 45 人未満の階級に含まれ，2018 年度も 30 人以上 45 人未満の階級に含まれるから，両者は等しい。(ケ ②)

(第 1 四分位数について)

第 1 四分位数は小さい方から 7 番目の値と 8 番目の値の平均値である。

よって，2009 年度は，15 人以上 30 人未満の階級に含まれ，2018 年度も 15 人以上 30 人未満の階級に含まれるから，両者は等しい。(コ ②)

(第 3 四分位数について)

第 3 四分位数は大きい方から 7 番目の値と 8 番目の値の平均値である。

よって，2009 年度は，60 人以上 75 人未満の階級に含まれ，2018 年度は 45 人以上 60 人未満の階級に含まれるから，2018 年度の方が小さい。(サ ⓪)

(範囲について)

2009 年度は小さく見積もって $165-30=135$ (人) より大きい値となるのに対し，

2018 年度は大きく見積もって $135-0=135$ (人) より小さい値となる。

よって，2018 年度の方が小さい。(シ ⓪)

(四分位範囲について)

2009 年度の第 1 四分位数は 15 人以上 30 人未満の階級に含まれ，第 3 四分位数は 60 人以上 75 人未満の階級に含まれる。

よって，2009 年度の四分位範囲は，$75-15=60$ (人) より小さく，$60-30=30$ (人) より大きい。

2018 年度の第 1 四分位数は 15 人以上 30 人未満の階級に含まれ，第 3 四分位数は 45 人以上 60 人未満の階級に含まれる。

よって，2018 年度の四分位範囲は，$60-15=45$ (人) より小さく，$45-30=15$ (人) より大きい。

したがって，四分位範囲については，これら 2 つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない。(ス ③)

(2)　⓪ 「教員 1 人あたりの学習者数」の 15 人以上 30 人未満の階級に含まれる値が，10 個しかなく，図 4 のヒストグラムに矛盾する。

① 「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の最大値が 450 人未満であり，図 3 の箱ひげ図に矛盾する。

③ 「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の第 1 四分位数が 100 人よりも大きい値であり，図 3 の箱ひげ図に矛盾する。

したがって，正しい散布図は　セ ②

補足　③ は，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の中央値が 150 人よりも大きい値で

あることから，図 3 の箱ひげ図に矛盾すると考えてもよい。

(3)　S と T の相関係数は，$\dfrac{(S\text{ と }T\text{ の共分散})}{(S\text{ の標準偏差})\times(T\text{ の標準偏差})}$ で計算できるから

$$\frac{735.3}{39.3\times29.9}=\frac{73530}{393\times299}=\frac{73530}{117507}=0.625\cdots\cdots$$

よって，小数第 3 位を四捨五入して　$^{ソ}0.^{タチ}63$

(4)　(3) から，S と T の間に正の相関があるため，正しい散布図は，①か③のいずれかである。また，S の平均値が 81.8，T の平均値が 72.9 であることから，①の散布図はこれに矛盾する。

したがって，正しい散布図は　^{ツ}③

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　(i)　A，B の持参したプレゼントをそれぞれ a，b とする。

プレゼントの受け取り方の総数は　　2! 通り

A，B の 2 人を順に並べ，それぞれが受け取るプレゼントの組み合わせを樹形図で表すと，右の図のようになる。

A	B	
a	b	×
b	a	○

よって，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

ア1 通り

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$（イ 1，ウ 2）

(ii)　A，B，C の持参したプレゼントをそれぞれ a，b，c とする。

プレゼントの受け取り方の総数は　　3! 通り

A，B，C の 3 人を順に並べ，それぞれが受け取るプレゼントの組み合わせを樹形図で表すと，右の図のようになる。

A	B	C	
a	b	c	×
	c	b	×
b	a	c	×
	c	a	○
c	a	b	○
	b	a	×

よって，3 人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち 1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

エ2 通り

したがって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{2}{3!}=\dfrac{1}{3}$（オ 1，カ 3）

(iii)　3 人で交換会を開く場合，1 回の交換で交換会が終了しない確率は，(ii) より

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，4 回の交換でも交換会が終了しない確率は　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

「4 回以下の交換で交換会が終了する」という事象は「4 回の交換でも交換会が終了しない」という事象の余事象であるから，求める確率は　$1-\dfrac{16}{81}=\dfrac{65}{81}$（キク 65，ケコ 81）

(2)　A，B，C，D の 4 人で交換会を開く場合，プレゼントの受け取り方の総数は

4! 通り

[1]　ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　　${}_4C_1$ 通り

残りの 3 人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1) の (ii) より　　2 通り

よって　　${}_4C_1\times 2=$ サ8 (通り)

[2]　ちょうど 2 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　　${}_4C_2$ 通り

残りの 2 人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1) の (i) より　　1 通り

よって　$_4C_2\times 1={}^{シ}6$ (通り)

[3]　ちょうど3人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

3人が自分の持参したプレゼントを受け取ると，残りの1人も自動的に自分の持参したプレゼントを受け取ることになる。

よって　0通り

[4]　4人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

プレゼントの受け取り方の総数は　1通り

[1]～[4]から，1回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数は

$$8+6+0+1={}^{スセ}15 \text{ (通り)}$$

このとき，4人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

$$4!-15=9 \text{ (通り)}$$

よって，1回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{9}{4!}=\dfrac{{}^{ソ}3}{{}^{タ}8}$

(3)　A，B，C，D，Eの5人で交換会を開く場合，プレゼントの受け取り方の総数は

$$5! \text{ 通り}$$

[1]　ちょうど1人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　$_5C_1$ 通り

残りの4人のプレゼントの受け取り方の総数は，(2)より　9通り

よって　$_5C_1\times 9=45$ (通り)

[2]　ちょうど2人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　$_5C_2$ 通り

残りの3人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1)の(ii)より　2通り

よって　$_5C_2\times 2=20$ (通り)

[3]　ちょうど3人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

自分の持参したプレゼントを受け取る人の選び方は　$_5C_3$ 通り

残りの2人のプレゼントの受け取り方の総数は，(1)の(i)より　1通り

よって　$_5C_3\times 1=10$ (通り)

[4]　ちょうど4人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

(2)の[3]と同様に考えると　0通り

[5]　5人全員が自分の持参したプレゼントを受け取る場合

プレゼントの受け取り方の総数は　1通り

[1]～[5]から，1回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数は

$$45+20+10+0+1=76 \text{ (通り)}$$

このとき，5人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る，すなわち1回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方の総数は

$$5!-76=44 \text{ (通り)}$$

よって，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{44}{5!}=\dfrac{^{チツ}11}{_{テト}30}$

(4)　5 人で交換会を開いたとき，1 回目の交換で A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象を X，1 回目で交換会が終了する事象を Y とすると，求める条件付き確率は　$P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}$

$X\cap Y=Y$ であるから，(3) より　$P(X\cap Y)=P(Y)=\dfrac{11}{30}$

また，1 回目の交換で A，B，C，D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，E が自分の持参したプレゼントを受け取る事象を V，E が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象を W とする。

このとき　$X=V\cup W$

事象 V は，E 以外の 4 人が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象であるから，(2) より　$P(V)=\dfrac{9}{5!}=\dfrac{3}{40}$

事象 W は，5 人全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取る事象であるから，(3) より　$P(W)=\dfrac{11}{30}$

事象 V，W は互いに排反であるから　$P(X)=P(V)+P(W)=\dfrac{3}{40}+\dfrac{11}{30}=\dfrac{53}{120}$

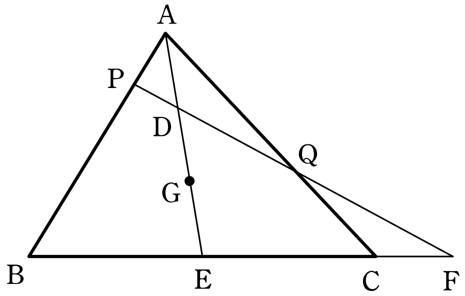
したがって，求める条件付き確率は　$P_X(Y)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\dfrac{11}{30}\div\dfrac{53}{120}=\dfrac{^{ナニ}44}{_{ヌネ}53}$

7

（解説）

(1)　点 G は △ABC の重心であり，点 D は線分 AG の中点であるから

$$AD:DG:GE=1:1:1$$



よって　$\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}2}$

△ABE と直線 PF にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BF}{FE}\cdot\dfrac{ED}{DA}=1$

よって　$\dfrac{BP}{AP}=\dfrac{DE}{AD}\cdot\dfrac{BF}{EF}$　……①

$={}^{\text{ウ}}2\cdot\dfrac{BF}{EF}$　（$^{\text{エ}}$①，$^{\text{オ}}$③）

△ACE と直線 DF にメネラウスの定理を用いると　$\dfrac{AQ}{QC}\cdot\dfrac{CF}{FE}\cdot\dfrac{ED}{DA}=1$

よって　$\dfrac{CQ}{AQ}=\dfrac{DE}{AD}\cdot\dfrac{CF}{EF}$　……②

$={}^{\text{カ}}2\cdot\dfrac{CF}{EF}$　（$^{\text{キ}}$②，$^{\text{ク}}$③）

ゆえに　$\dfrac{BP}{AP}+\dfrac{CQ}{AQ}=2\cdot\dfrac{BF}{EF}+2\cdot\dfrac{CF}{EF}=2\cdot\dfrac{BF+CF}{EF}$

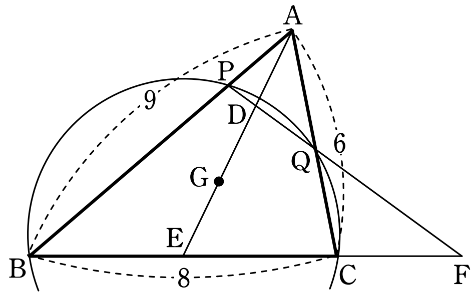
ここで　$\dfrac{BF+CF}{EF}=\dfrac{(2EC+CF)+CF}{EC+CF}=2$　……③

よって　$\dfrac{BP}{AP}+\dfrac{CQ}{AQ}=2\cdot 2={}^{\text{ケ}}4$

注意　上の解答は点 F が C の右側にある場合を考えているが，B の左側にある場合も同様に示すことができる。

(2)　方べきの定理により

$$AP\cdot AB=AQ\cdot AC$$



ゆえに　$9AP=6AQ$

よって　$AQ=\dfrac{{}^{\text{コ}}3}{{}^{\text{サ}}2}AP$

点 D は線分 AG の中点であるから，(1) より

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=4$$

$BP=9-AP$，$CQ=6-\dfrac{3}{2}AP$ であるから

$$\frac{9-AP}{AP}+\frac{6-\frac{3}{2}AP}{\frac{3}{2}AP}=4 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{9}{AP}-1+\frac{4}{AP}-1=4$$

これを解くと　　$\mathrm{AP}=\dfrac{^{シス}13}{^{セ}6}$

よって　　$\mathrm{AQ}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{13}{6}=\dfrac{^{ソタ}13}{^{チ}4}$

点 D は線分 AG の中点であるから，(1) より　　$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=2\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$

$\mathrm{CQ}=6-\dfrac{13}{4}=\dfrac{11}{4}$，$\mathrm{EF}=4+\mathrm{CF}$ であるから　　$\dfrac{\frac{11}{4}}{\frac{13}{4}}=2\cdot\dfrac{\mathrm{CF}}{4+\mathrm{CF}}$

よって　　$11(4+\mathrm{CF})=26\mathrm{CF}$　　　　これを解くと　　$\mathrm{CF}=\dfrac{^{ツテ}44}{^{トナ}15}$

(3)　(1) の ①，②，③ は △ABC の形状や点 F の位置に関係なく成り立つから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}+\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}$$
$$=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{BF}+\mathrm{CF}}{\mathrm{EF}}=2\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$ のとき　　$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}=5$

したがって，AD：DE＝1：5 であり，AG：GE＝2：1＝4：2 であるから

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DG}:\mathrm{GE}=1:3:2$$

ゆえに　　$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{^{ニ}1}{^{ヌ}3}$