

1

2 次関数 $y = x^2 - (k+3)x + 3k$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さが 5 のとき、定数 k の値を求めよ。

2

次の条件を満たす定数 a の値の範囲を求めよ。

- (1) x の方程式 $x^2 - 2ax + a^2 + a - 5 = 0$ が実数解をもつ。
- (2) x の方程式 $ax^2 - (2a-3)x + a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

3

2 つの 2 次方程式 $2x^2 + kx + 4 = 0$, $x^2 + x + k = 0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め、その共通解を求めよ。

4

2 次関数 $y = x^2 + 4x + a$ のグラフについて

- (1) x 軸と異なる 2 点で交わる時、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) x 軸に接するとき、定数 a の値と接点の座標を求めよ。

5

- (1) 関数 $y = x^2 + ax + a$ のグラフが直線 $y = x + 1$ と接するように、定数 a の値を定めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。
- (2) k は定数とする。関数 $y = x^2 - 2kx$ のグラフと直線 $y = 2x - k^2$ の共有点の個数を調べよ。

6

次の関数に最大値、最小値があれば、それを求めよ。

- (1) $y = 2x^2 + 3x + 1 \left(-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \right)$
- (2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \ (1 \leq x \leq 5)$

7

定義域を $0 \leq x \leq 3$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ の最大値が 9, 最小値が 1 のとき、定数 a, b の値を求めよ。

8

放物線 $y = 2x^2 - 8x + 5$ をどのように平行移動すると、放物線 $y = 2x^2 + 4x + 7$ に重なるか。

9

放物線 $y = 3x^2 - 6x + 4$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

10

放物線 $y = -2x^2 + 3x - 1$ を、次の直線または点に関して、それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

- (1) x 軸
- (2) y 軸
- (3) 原点

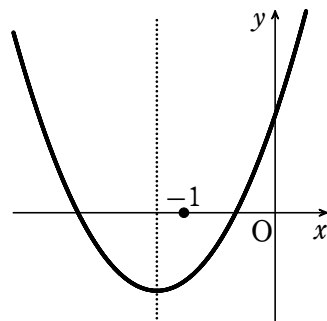
11

放物線 $y = 2x^2 + 6x + 4$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動し、更に y 軸に関して対称移動すると、放物線 $y = 2x^2 - 2x + 3$ に移った。定数 p, q の値を求めよ。

12

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右の図のようになるとき、次の値の符号を調べよ。

- (1) c (2) b (3) b^2-4ac
 (4) $a+b+c$ (5) $a-b+c$
 (6) $2a-b$



13

- (1) 放物線 $y=x^2+ax-2$ の頂点の座標を a で表せ。また、頂点が直線 $y=2x-1$ 上にあるとき、定数 a の値を求めよ。
 (2) 2つの放物線 $y=2x^2-12x+17$ と $y=ax^2+6x+b$ の頂点が一致するように定数 a , b の値を定めよ。

14

2つの2次方程式

$$ax^2-4x+a=0, \quad x^2-ax+a^2-3a=0$$

について、次の条件を満たす定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

- (1) 2つの方程式がともに実数解をもつ。
 (2) 少なくとも一方の方程式が実数解をもつ。

15

a を定数とする。 x の方程式 $(a-3)x^2+2(a+3)x+a+5=0$ の実数解の個数を求めよ。
 また、解が1個のとき、その解を求めよ。

16

a を定数とし、 x の2次関数 $y=x^2-2(a+2)x+a^2-a+1$ のグラフを G とする。

グラフ G が y 軸に関して対称になるのは $a=$ のときで、このときのグラフを G_1 とする。

また、グラフ G の頂点が x 軸上にあるのは $a=$ のときで、このときのグラフを G_2 とする。

グラフ G_1 を x 軸方向に , y 軸方向に だけ平行移動するとグラフ G_2 に重なる。

1

解答 $k=8, -2$

2

解答 (1) $a \leq 5$ (2) $a < 0, 0 < a < \frac{3}{4}$

3

解答 $k=-6$, 共通解 $x=2$

4

解答 (1) $a < 4$ (2) $a=4, (-2, 0)$

5

解答 (1) $a=1$ のとき $(0, 1)$, $a=5$ のとき $(-2, -1)$
(2) $k > -\frac{1}{2}$ のとき 2 個, $k = -\frac{1}{2}$ のとき 1 個, $k < -\frac{1}{2}$ のとき 0 個

6

解答 (1) $x = -\frac{1}{2}$ で最小値 0, 最大値はない
(2) $x=2$ で最大値 $\frac{7}{2}$, $x=5$ で最小値 -1

7

解答 $a=2, b=3$ または $a=-2, b=7$

8

解答 x 軸方向に -3 , y 軸方向に 8 だけ平行移動

9

解答 $y=3x^2-18x+27$

10

解答 (1) $y=2x^2-3x+1$ (2) $y=-2x^2-3x-1$ (3) $y=2x^2+3x+1$

11

解答 $p=1, q=3$

12

解答 (1) $c > 0$ (2) $b > 0$ (3) $b^2-4ac > 0$ (4) $a+b+c > 0$
(5) $a-b+c < 0$ (6) $2a-b < 0$

13

解答 (1) 順に $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}-2\right)$, $a=2$ (2) $a=-1, b=-10$

14

解答 (1) $0 < a \leq 2$ (2) $-2 \leq a < 0, 0 < a \leq 4$

15

解答 $-6 < a < 3$, $3 < a$ のとき 2 個; $a=-6$, 3 のとき 1 個; $a < -6$ のとき 0 個;
 $a=3$ のとき $x=-\frac{2}{3}$, $a=-6$ のとき $x=-\frac{1}{3}$

16

解答 (ア) -2 (イ) $-\frac{3}{5}$ (ウ) $\frac{7}{5}$ (エ) -7

1

グラフと x 軸の共有点の x 座標は, $x^2-(k+3)x+3k=0$ の実数解である。
左辺を因数分解すると $(x-k)(x-3)=0$ よって $x=k, 3$
ゆえに, グラフが x 軸から切り取る線分の長さが 5 であるとき $|k-3|=5$
よって $k-3=\pm 5$ したがって $k=8, -2$

2

(1) 判別式を D とすると $\frac{D}{4}=(-a)^2-1 \cdot (a^2+a-5)=-a+5$

実数解をもつための必要十分条件は $D \geq 0$
よって $-a+5 \geq 0$ ゆえに $a \leq 5$

(2) [1] $a=0$ のとき, 方程式は $3x=0$

よって, $x=0$ となり, 方程式は 1 つの実数解しかもたないから, 題意を満たさない。

[2] $a \neq 0$ のとき

与えられた方程式は 2 次方程式で, 判別式を D とすると

$$D = \{-(2a-3)\}^2 - 4a \cdot a = (2a-3)^2 - 4a^2 \\ = 4a^2 - 12a + 9 - 4a^2 = -12a + 9$$

異なる2つの実数解をもつための必要十分条件は $D > 0$

$$\text{ゆえに} \quad -12a + 9 > 0 \quad \text{よって} \quad a < \frac{3}{4}$$

$$a \neq 0 \text{ であるから} \quad a < 0, 0 < a < \frac{3}{4}$$

以上から、求める a の値の範囲は $a < 0, 0 < a < \frac{3}{4}$

3

共通解を $x = \alpha$ とおいて、方程式にそれぞれ代入すると

$$2\alpha^2 + k\alpha + 4 = 0 \quad \dots\dots ①, \quad \alpha^2 + \alpha + k = 0 \quad \dots\dots ②$$

$$① - ② \times 2 \text{ から} \quad (k-2)\alpha + 4 - 2k = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k-2)(\alpha-2) = 0$$

$$\text{よって} \quad k=2 \text{ または } \alpha=2$$

[1] $k=2$ のとき

2つの方程式はともに $x^2 + x + 2 = 0$ で、同じ方程式になる。

ところが、判別式を D とすると $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ であるから、実数解をもたない。

[2] $\alpha=2$ のとき

$$② \text{ から} \quad 2^2 + 2 + k = 0 \quad \text{よって} \quad k = -6$$

このとき、2つの方程式は $2x^2 - 6x + 4 = 0, x^2 + x - 6 = 0$ となり、 $x=2$ は共通解である。

以上から $k = -6$ 、共通解は $x=2$

4

$y = x^2 + 4x + a \quad \dots\dots ①$ について

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4(4-a)$$

(1) ①のグラフが x 軸と異なる2点で交わるための必要十分条件は

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad 4(4-a) > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a < 4$$

(2) ①のグラフが x 軸に接するための必要十分条件は

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4(4-a) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a = 4$$

$$\text{接点の} x \text{ 座標は} \quad x = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$\text{よって、接点の座標は} \quad (-2, 0)$$

5

(1) $y = x^2 + ax + a$ と $y = x + 1$ から y を消去して

$$x^2 + ax + a = x + 1$$

$$\text{整理すると} \quad x^2 + (a-1)x + a-1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

2次方程式①の判別式を D とすると

$$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = (a-1)(a-5)$$

与えられた放物線と直線が接するための必要十分条件は $D = 0$

$$\text{ゆえに} \quad (a-1)(a-5) = 0 \quad \text{よって} \quad a = 1, 5$$

$$\text{このとき、①の重解は} \quad x = -\frac{a-1}{2 \cdot 1} = \frac{1-a}{2}$$

$$a=1 \text{ のとき} \quad x=0 \quad \text{このとき} \quad y=1$$

$$\text{したがって、接点の座標は} \quad (0, 1)$$

$$a=5 \text{ のとき} \quad x=-2 \quad \text{このとき} \quad y=-1$$

$$\text{したがって、接点の座標は} \quad (-2, -1)$$

(2) $y = x^2 - 2kx$ と $y = 2x - k^2$ から y を消去して

$$x^2 - 2kx = 2x - k^2$$

$$\text{整理すると} \quad x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

2次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - 1 \cdot k^2 = 2k+1$$

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad 2k+1 > 0 \text{ となるのは} \quad k > -\frac{1}{2}$$

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2k+1 = 0 \text{ となるのは} \quad k = -\frac{1}{2}$$

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad 2k+1 < 0 \text{ となるのは} \quad k < -\frac{1}{2}$$

よって、求める共有点の個数は

$k > -\frac{1}{2}$ のとき 2 個, $k = -\frac{1}{2}$ のとき 1 個, $k < -\frac{1}{2}$ のとき 0 個

[6]

(1) $y = 2x^2 + 3x + 1$

$$= 2 \left\{ x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\} - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1$$

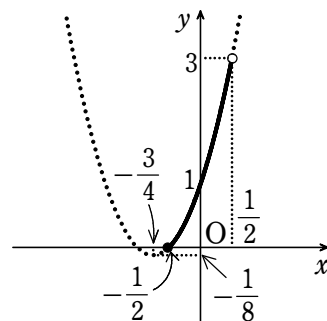
$$= 2 \left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

また $x = -\frac{1}{2}$ のとき $y = 0$

$x = \frac{1}{2}$ のとき $y = 3$

よって、与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに $x = -\frac{1}{2}$ で最小値 0, 最大値はない。



(2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{3}{2}$$

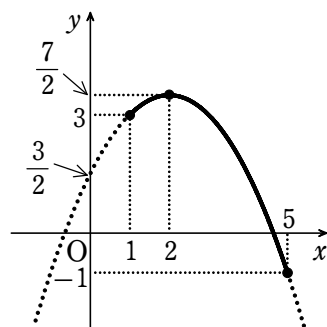
$$= -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{7}{2}$$

また $x = 1$ のとき $y = 3$

$x = 5$ のとき $y = -1$

よって、与えられた関数のグラフは図の実線部分である。

ゆえに $x = 2$ で最大値 $\frac{7}{2}$, $x = 5$ で最小値 -1



[7]

関数の式を変形して $f(x) = a(x-1)^2 - a + b$

[1] $a = 0$ のとき, $f(x) = b$ (一定) となり, 条件を満たさない。

[2] $a > 0$ のとき, $f(x)$ のグラフは下に凸の放物線となり,

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で $f(x)$ は

$x = 3$ で最大値 $f(3) = 3a + b$,

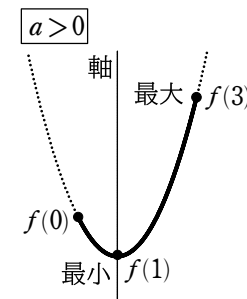
$x = 1$ で最小値 $f(1) = -a + b$

をとる。

したがって $3a + b = 9, -a + b = 1$

これを解いて $a = 2, b = 3$

これは $a > 0$ を満たす。



[3] $a < 0$ のとき, $f(x)$ のグラフは上に凸の放物線となり,

$0 \leq x \leq 3$ の範囲で $f(x)$ は

$x = 1$ で最大値 $f(1) = -a + b$,

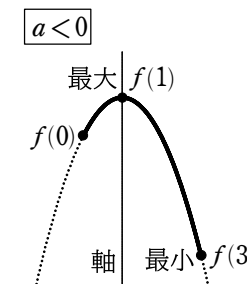
$x = 3$ で最小値 $f(3) = 3a + b$

をとる。

したがって $-a + b = 9, 3a + b = 1$

これを解いて $a = -2, b = 7$

これは $a < 0$ を満たす。



以上から $a = 2, b = 3$ または $a = -2, b = 7$

[8]

$y = 2x^2 - 8x + 5$ ①, $y = 2x^2 + 4x + 7$ ②

とする。

放物線 ① を平行移動して放物線 ② に重ねると, ① の頂点は ② の頂点に移る。

① を変形すると $y = 2(x - 2)^2 - 3$

② を変形すると $y = 2(x + 1)^2 + 5$

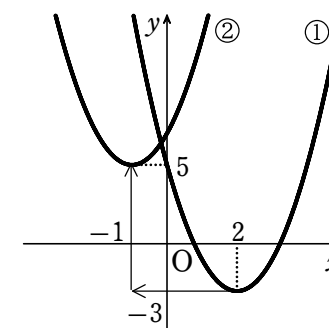
よって, ① の頂点は点 $(2, -3)$

② の頂点は点 $(-1, 5)$

放物線 ① を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すれば, 放物線 ①, ② が重なるとすると

$2 + p = -1, -3 + q = 5$ よって $p = -3, q = 8$

したがって, x 軸方向に -3 , y 軸方向に 8 だけ平行移動すればよい。



9

求める方程式は、 $y=3x^2-6x+4$ の x, y をそれぞれ $x-2, y-(-1)$ でおき換えて

$$y-(-1)=3(x-2)^2-6(x-2)+4 \quad \text{すなわち} \quad y=3x^2-18x+27$$

10

(1) 求める方程式は、 x, y をそれぞれ $x, -y$ でおき換えて

$$-y=-2x^2+3x-1 \quad \text{すなわち} \quad y=2x^2-3x+1$$

(2) 求める方程式は、 x, y をそれぞれ $-x, y$ でおき換えて

$$y=-2(-x)^2+3(-x)-1 \quad \text{すなわち} \quad y=-2x^2-3x-1$$

(3) 求める方程式は、 x, y をそれぞれ $-x, -y$ でおき換えて

$$-y=-2(-x)^2+3(-x)-1 \quad \text{すなわち} \quad y=2x^2+3x+1$$

11

放物線 $y=2x^2+6x+4$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると

$$y-q=2(x-p)^2+6(x-p)+4$$

$$\text{すなわち} \quad y=2x^2-(4p-6)x+2p^2-6p+q+4$$

更に、これを y 軸に関して対称移動すると

$$y=2(-x)^2-(4p-6)(-x)+2p^2-6p+q+4$$

$$\text{すなわち} \quad y=2x^2+(4p-6)x+2p^2-6p+q+4$$

これが $y=2x^2-2x+3$ と一致するから

$$4p-6=-2, \quad 2p^2-6p+q+4=3$$

$$\text{これを解くと} \quad p=1, \quad q=3$$

12

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \quad \text{であるから}$$

$$\text{放物線 } y=ax^2+bx+c \text{ の軸は、直線 } x=-\frac{b}{2a}, \text{ 頂点の } y \text{ 座標は } -\frac{b^2-4ac}{4a},$$

y 軸との交点の y 座標は c

(1) グラフは y 軸と $y>0$ の部分で交わるから $c>0$

(2) グラフは下に凸であるから $a>0$

$$\text{軸は } x<0 \text{ の範囲にあるから} \quad -\frac{b}{2a}<0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b}{2a}>0$$

$$a>0 \text{ であるから} \quad b>0$$

$$(3) \text{ 頂点の } y \text{ 座標が負であるから} \quad -\frac{b^2-4ac}{4a}<0$$

$$a>0 \text{ であるから} \quad -(b^2-4ac)<0 \quad \text{ゆえに} \quad b^2-4ac>0$$

$$\text{別解} \quad y=ax^2+bx+c \text{ のグラフが } x \text{ 軸と異なる 2 点で交わるから} \quad b^2-4ac>0$$

$$(4) \quad x=1 \text{ のとき} \quad y=a \cdot 1^2+b \cdot 1+c=a+b+c$$

$$\text{グラフより, } x=1 \text{ のとき } y>0 \text{ であるから} \quad a+b+c>0$$

$$(5) \quad x=-1 \text{ のとき} \quad y=a \cdot (-1)^2+b \cdot (-1)+c=a-b+c$$

$$\text{グラフより, } x=-1 \text{ のとき } y<0 \text{ であるから} \quad a-b+c<0$$

$$(6) \text{ 軸は } x<-1 \text{ の範囲にあるから} \quad -\frac{b}{2a}<-1$$

$$\text{よって} \quad b>2a \quad \text{ゆえに} \quad 2a-b<0$$

13

$$(1) \quad y=x^2+ax-2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-2$$

$$\text{よって, 頂点の座標は} \quad \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}-2\right)$$

$$\text{また, 頂点が直線 } y=2x-1 \text{ 上にあるとき} \quad -\frac{a^2}{4}-2=2\left(-\frac{a}{2}\right)-1$$

$$\text{整理して} \quad a^2-4a+4=0 \quad \text{よって} \quad (a-2)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=2$$

$$(2) \quad y=2x^2-12x+17=2(x^2-6x)+17=2(x-3)^2-1$$

$$y=ax^2+6x+b=a\left(x^2+\frac{6}{a}x\right)+b=a\left(x+\frac{3}{a}\right)^2-a\left(\frac{3}{a}\right)^2+b$$

$$=a\left(x+\frac{3}{a}\right)^2-\frac{9}{a}+b$$

$$\text{よって, 2つの放物線の頂点の座標は, 順に} \quad (3, -1), \left(-\frac{3}{a}, -\frac{9}{a}+b\right)$$

$$\text{題意を満たすための条件は} \quad 3=-\frac{3}{a} \quad \cdots \cdots \text{①}, \quad -1=-\frac{9}{a}+b \quad \cdots \cdots \text{②}$$

①の両辺に $\frac{a}{3}$ を掛けて $a = -1$

$a = -1$ を②に代入して $-1 = 9 + b$ ゆえに $b = -10$

別解 放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ の頂点は、点 $(3, -1)$ であるから、2つの放物線の頂点が一致するための条件は、 $y = ax^2 + 6x + b$ が、 $y = a(x-3)^2 - 1$ ……③と表されることである。

③の右辺を展開して整理すると $y = ax^2 - 6ax + 9a - 1$

$y = ax^2 + 6x + b$ と係数を比較して $6 = -6a, b = 9a - 1$

これを解いて $a = -1, b = -10$

14

2次方程式 $ax^2 - 4x + a = 0, x^2 - ax + a^2 - 3a = 0$ の判別式を、それぞれ D_1, D_2 とす

ると $\frac{D_1}{4} = (-2)^2 - a \cdot a = -(a^2 - 4) = -(a+2)(a-2)$

$$D_2 = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 3a) = -3a^2 + 12a = -3a(a-4)$$

(1) 問題の条件は、 $a \neq 0$ のもとで $D_1 \geq 0$ かつ $D_2 \geq 0$

$D_1 \geq 0$ から $(a+2)(a-2) \leq 0$

よって $-2 \leq a \leq 2$

$a \neq 0$ であるから $-2 \leq a < 0, 0 < a \leq 2$ ……①

$D_2 \geq 0$ から $3a(a-4) \leq 0$

よって $0 \leq a \leq 4$

$a \neq 0$ であるから $0 < a \leq 4$ ……②

①, ②の共通範囲を求めて $0 < a \leq 2$

(2) 問題の条件は、 $a \neq 0$ のもとで

$D_1 \geq 0$ または $D_2 \geq 0$

①と②の範囲を合わせて

$-2 \leq a < 0, 0 < a \leq 4$

15

[1] $a = 3$ のとき、与えられた方程式は $12x + 8 = 0$

ゆえに $x = -\frac{2}{3}$

[2] $a \neq 3$ のとき、与えられた方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a-3)(a+5) = a^2 + 6a + 9 - (a^2 + 2a - 15)$$

$$= 4a + 24 = 4(a+6)$$

よって、実数解の個数は、 $a \neq 3$ に注意して

$D > 0$ すなわち $-6 < a < 3, 3 < a$ のとき 2個

$D = 0$ すなわち $a = -6$ のとき 1個

$D < 0$ すなわち $a < -6$ のとき 0個

[1], [2] から、求める実数解の個数は

$-6 < a < 3, 3 < a$ のとき 2個

$a = -6, 3$ のとき 1個

$a < -6$ のとき 0個

また、 $a = -6$ のとき解が1個であり、このとき、与えられた2次方程式は重解をもち、

$$\text{その重解は } x = -\frac{2(a+3)}{2(a-3)} = -\frac{-6+3}{-6-3} = -\frac{1}{3}$$

以上から、解が1個であるときの解は

$$a = 3 \text{ のとき } x = -\frac{2}{3}, \quad a = -6 \text{ のとき } x = -\frac{1}{3}$$

16

$$G: y = x^2 - 2(a+2)x + a^2 - a + 1$$

$$= \{x - (a+2)\}^2 - (a+2)^2 + a^2 - a + 1$$

$$= \{x - (a+2)\}^2 - 5a - 3 \quad \dots\dots ①$$

よって、 G の軸は直線 $x = a+2$ 、頂点は点 $(a+2, -5a-3)$ である。

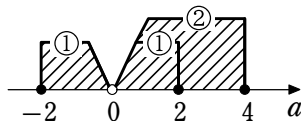
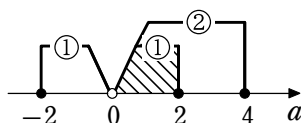
G が y 軸に関して対称になるのは、 G の軸が y 軸に一致するときである。

よって $a+2=0$ ゆえに $a = -2$

また、 G の頂点が x 軸上にあるのは $-5a-3=0$ すなわち $a = -\frac{3}{5}$ のとき。

$a = -2, a = -\frac{3}{5}$ をそれぞれ①に代入することにより、 G_1, G_2 をグラフにもつ2次関

数はそれぞれ



$$G_1: y = x^2 + 7, \quad G_2: y = \left(x - \frac{7}{5}\right)^2$$

よって, G_1 の頂点は 点 $(0, 7)$,

G_2 の頂点は 点 $\left(\frac{7}{5}, 0\right)$

G_1 を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動し, G_2 に

重なるとすると $0 + p = \frac{7}{5}, 7 + q = 0$

よって $p = \frac{7}{5}, q = -7$

