

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

- (1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ (2) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$
 (3) $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta < 0$ (4) $2\sin^2\theta - 4 < 5\cos\theta$
 (5) $2\cos^2\theta \leq \sin\theta + 1$ (6) $\sin\theta < \tan\theta$

【解答】 (1) $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ (2) $\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$ (3) $0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$
 (4) $0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$ (5) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \theta = \frac{3}{2}\pi$
 (6) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

【解説】

- (1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ から
 $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$ よって $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$
 ゆえに $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$ ……①
 $\cos\theta + 2 \neq 0$ であるから、①より
 $2\cos\theta - 1 = 0$ よって $\cos\theta = \frac{1}{2}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$
 (2) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$ から
 $2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta - 3 = 0$ よって $2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 1 = 0$
 ゆえに $(\sin\theta + 1)(2\sin\theta + 1) = 0$
 したがって $\sin\theta = -1, -\frac{1}{2}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから
 $\sin\theta = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$
 $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ のとき $\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$
 よって、解は $\theta = \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi$
 (3) $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta < 0$ から
 $\sin\theta(2\sin\theta - \sqrt{3}) < 0$ よって $0 < \sin\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、解は
 $0 < \theta < \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$
 (4) $2\sin^2\theta - 4 < 5\cos\theta$ から
 $2(1 - \cos^2\theta) - 4 < 5\cos\theta$ よって $2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 2 > 0$
 ゆえに $(\cos\theta + 2)(2\cos\theta + 1) > 0$ ……①
 $\cos\theta + 2 > 0$ であるから、①より
 $2\cos\theta + 1 > 0$ よって $\cos\theta > -\frac{1}{2}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、解は
 $0 \leq \theta < \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$
 (5) $2\cos^2\theta \leq \sin\theta + 1$ から
 $2(1 - \sin^2\theta) \leq \sin\theta + 1$ よって $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 \geq 0$
 ゆえに $(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \geq 0$ ……①
 $\sin\theta + 1 \geq 0$ であるから、①より
 $\sin\theta + 1 = 0$ または $2\sin\theta - 1 \geq 0$
 よって $\sin\theta = -1$ または $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから
 $\sin\theta = -1$ のとき $\theta = \frac{3}{2}\pi$
 $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$ のとき $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$
 したがって、解は $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi, \theta = \frac{3}{2}\pi$
 (6) $\sin\theta < \tan\theta$ から $\tan\theta \cos\theta < \tan\theta$
 よって $\tan\theta(1 - \cos\theta) > 0$ ……①
 $1 - \cos\theta \geq 0$ であるから、①より
 $\tan\theta > 0$ かつ $1 - \cos\theta \neq 0$
 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから
 $\tan\theta > 0$ のとき $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
 $1 - \cos\theta \neq 0$ のとき $\theta \neq 0$
 したがって、解は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$

2

次の等式を満たす θ が存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

$$\cos^2\theta + \sin\theta + a = 0$$

【解答】 $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$

【解説】

等式を変形すると $-\cos^2\theta - \sin\theta = a$

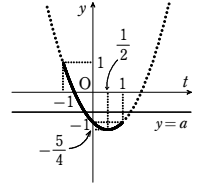
$y = -\cos^2\theta - \sin\theta, \sin\theta = t$ とおくと

$$y = -(1 - \sin^2\theta) - \sin\theta = -(1 - t^2) - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \dots\dots ①$$

また $-1 \leq t \leq 1$

よって、等式を満たす θ が存在するための条件は、 t についての2次関数①のグラフが、 $-1 \leq t \leq 1$ において直線 $y = a$ と共有点をもつことである。

ゆえに、図から $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$



追加

1

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

- | | |
|--|---|
| (1) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ | (2) $2\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3 = 0$ |
| (3) $2\sin^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta < 0$ | (4) $2\sin^2\theta - 4 < 5\cos\theta$ |
| (5) $2\cos^2\theta \leq \sin\theta + 1$ | (6) $\sin\theta < \tan\theta$ |

2

次の等式を満たす θ が存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

$$\cos^2\theta + \sin\theta + a = 0$$