【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材①

中３甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学 R「数列」範囲の漸化式
数学 K「指数関数」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=10$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$　　(2) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+3}$

$\boxed{2}$

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=3$，$a_2=7$，$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

(2) $a_1=1$，$a_2=6$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

$\boxed{3}$

次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=1$，$(n+1)a_{n+1}=na_n$　　(2) $a_1=1$，$na_{n+1}=(n+1)a_n$

(3) $a_1=2$，$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

$\boxed{4}$

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+4n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{5}$

$a>0$ とする。$a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}=4$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $a+a^{-1}$　　(2) $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}$

$\boxed{6}$

次の不等式を解け。

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\dfrac{1}{16}\right)^{x-1}$　　(2) $2\cdot4^x-17\cdot2^x+8<0$　　(3) $25^x-3\cdot5^x-10\geqq0$

$\boxed{7}$

(1) 関数 $y=4^{x+1}-2^{x+2}+2$ $(x\leqq2)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=6(2^x+2^{-x})-2(4^x+4^{-x})$ について，$2^x+2^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$

次の計算をせよ。

(1) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$　　(2) $0.09^{1.5}$　　(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}$　　(5) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}$

$\boxed{9}$

次の式を計算せよ。

(1) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$　　(2) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$

$\boxed{10}$

次の各組の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}$，$8^{\frac{1}{8}}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}$　　(3) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{6}$

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　(1)　$a_n=2^n(2n+3)$　(2)　$a_n=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{5\cdot2^n+(-1)^n}{3}$　(2)　$a_n=n\cdot3^{n-1}$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$a_n=\dfrac{1}{n}$　(2)　$a_n=n$　(3)　$a_n=3n-1$

$\boxed{4}$

解答　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{5}$

解答　(1)　52　(2)　$3\sqrt{6}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$x<3$　(2)　$-1<x<3$　(3)　$x\geqq1$

$\boxed{7}$

解答　(1)　$x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1

(2)　$y=-2t^2+6t+4$，$x=0$ のとき最大値 8

$\boxed{8}$

解答　(1)　$\dfrac{16}{81}$　(2)　0.027　(3)　2　(4)　$\sqrt[4]{2}$　(5)　$\sqrt{2}$　(6)　$3\sqrt[3]{3}$

$\boxed{9}$

解答　(1)　-1　(2)　2

$\boxed{10}$

解答　(1)　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$　(2)　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　(3)　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

$\boxed{1}$

解説

(1)　$a_{n+1}=2a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$　また　$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{10}{2}=5$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 5，公差 2 の等差数列で

$$b_n=5+(n-1)\cdot2=2n+3$$

したがって　$a_n=2^n\cdot b_n=2^n(2n+3)$

(2)　$a_1>0$ であるから，漸化式より　$a_2>0$　よって　$a_3>0$

同様にして，すべての自然数 n について　$a_n>0$

よって，各項の逆数が存在して，漸化式から

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+3}{a_n}\quad \text{すなわち}\quad \frac{1}{a_{n+1}}=2+\frac{3}{a_n}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと　$b_{n+1}=2+3b_n$

これを変形して　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$

また　$b_1+1=\dfrac{1}{a_1}+1=1+1=2$

よって，数列 $\{b_n+1\}$ は初項 2，公比 3 の等比数列で

$b_n+1=2\cdot3^{n-1}$　ゆえに　$b_n=2\cdot3^{n-1}-1$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ であるから　$a_n=\dfrac{1}{2\cdot3^{n-1}-1}$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ を変形すると

$$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)\quad\cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)\quad\cdots\cdots ②$$

① から，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は初項 $a_2+a_1=10$，公比 2 の等比数列で

$$a_{n+1}+a_n=10\cdot 2^{n-1} \qquad すなわち \qquad a_{n+1}+a_n=5\cdot 2^n \quad \cdots\cdots ③$$

② から，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -1 の等比数列で

$$a_{n+1}-2a_n=1\cdot(-1)^{n-1} \qquad すなわち \qquad a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-1} \quad \cdots\cdots ④$$

③−④ から　$3a_n=5\cdot 2^n-(-1)^{n-1}$　　よって　$a_n=\dfrac{5\cdot 2^n+(-1)^n}{3}$

(2)　$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ を変形すると　$a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

また　$a_2-3a_1=6-3=3$

よって，数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列で

$$a_{n+1}-3a_n=3\cdot 3^{n-1} \qquad すなわち \qquad a_{n+1}-3a_n=3^n$$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{1}{3}$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}$　　また　$b_1=\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列で

$$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$$

$a_n=3^n\cdot b_n$ であるから　$a_n=3^n\cdot\dfrac{n}{3}=n\cdot 3^{n-1}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　漸化式から　$(n+1)a_{n+1}=na_n=(n-1)a_{n-1}=\cdots\cdots=1\cdot a_1$

ゆえに　$na_n=1\cdot a_1=1$　　よって　$a_n=\dfrac{1}{n}$

(2)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots\cdots=\dfrac{a_1}{1}$

よって　$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}=1$　　したがって　$a_n=n$

(3)　漸化式の両辺を $n(n+1)$ で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

よって　$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_1}{1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}$

したがって　$a_n=3n-1$

$\boxed{4}$

(解説)

$a_{n+1}=3a_n+4n$　$\cdots\cdots$ ① とすると

$$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1) \quad \cdots\cdots ②$$

②−① から　$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n+4$

これを変形すると　$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

また　$b_1+2=a_2-a_1+2=7-1+2=8$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は初項 8，公比 3 の等比数列で

$$b_n+2=8\cdot 3^{n-1} \quad すなわち \quad b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(8\cdot 3^{k-1}-2)=1+\frac{8(3^{n-1}-1)}{3-1}-2(n-1)$$
$$=4\cdot 3^{n-1}-2n-1 \quad \cdots\cdots ③$$

$n=1$ のとき　$4\cdot 3^0-2\cdot 1-1=1$

$a_1=1$ であるから，③ は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

別解　$f(n)=\alpha n+\beta$ とおき，$a_{n+1}=3a_n+4n$ が，

$a_{n+1}-f(n+1)=3\{a_n-f(n)\}$　$\cdots\cdots$ ① の形に変形できるように α，β の値を定める。

① から　$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=3\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$

ゆえに　$a_{n+1}=3a_n-2\alpha n+\alpha-2\beta$

これと $a_{n+1}=3a_n+4n$ の右辺の係数を比較して　$-2\alpha=4$，$\alpha-2\beta=0$

よって　$\alpha=-2$，$\beta=-1$　ゆえに　$f(n)=-2n-1$

このとき ① より，数列 $\{a_n-(-2n-1)\}$ は初項 $a_1+2+1=4$，公比 3 の等比数列で

あるから　$a_n-(-2n-1)=4\cdot3^{n-1}$　したがって　$a_n=4\cdot3^{n-1}-2n-1$

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　$a+a^{-1}=\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3a^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=4^3-3\cdot4=64-12=52$

(2)　$\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2+2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}+\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=a+a^{-1}+2=52+2=54$

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}>0$ であるから　$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1}$ から　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}<\left(\frac{1}{2}\right)^{4(x-1)}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$2x+2>4(x-1)$

これを解いて　$x<3$

(2)　与式から　$2\cdot(2^x)^2-17\cdot2^x+8<0$

$2^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$2X^2-17X+8<0$

したがって　$(2X-1)(X-8)<0$

これを解いて　$\frac{1}{2}<X<8$　($X>0$ を満たす)

ゆえに　$\frac{1}{2}<2^x<8$　すなわち　$2^{-1}<2^x<2^3$

底 2 は 1 より大きいから　$-1<x<3$

(3)　与式から　$(5^x)^2-3\cdot5^x-10\geqq0$

$5^x=X$ とおくと　$X>0$

不等式は　$X^2-3X-10\geqq0$

したがって　$(X+2)(X-5)\geqq0$

$X+2>0$ であるから　$X-5\geqq0$　すなわち　$X\geqq5$

ゆえに　$5^x\geqq5$　底 5 は 1 より大きいから　$x\geqq1$

$\boxed{7}$

(解説)

(1)　$2^x=t$ とおくと　$t>0$　$x\leqq2$ であるから　$0<t\leqq2^2$

したがって　$0<t\leqq4$　……①

y を t の式で表すと　$y=4(2^x)^2-4\cdot2^x+2=4t^2-4t+2=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$

① の範囲において，y は $t=4$ で最大，$t=\frac{1}{2}$ で最小となる。

$t=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$

$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　ゆえに　$x=-1$

よって　$x=2$ のとき最大値 50，$x=-1$ のとき最小値 1

(2)　$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=t^2-2$

したがって　$y=6t-2(t^2-2)=-2t^2+6t+4$　……①

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であるから，(相加平均)$\geqq$(相乗平均)より

$2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$

すなわち　$t\geqq2$　……②

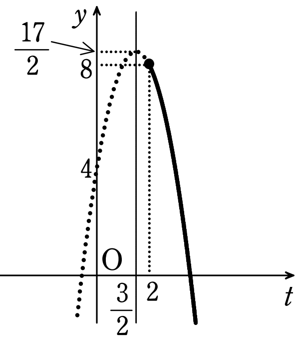
① から　$y=-2\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$

② の範囲において，y は $t=2$ のとき最大値 8 をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2^{-x}$

ゆえに　$x=-x$　よって　$x=0$

したがって　$x=0$ のとき最大値 8



8

解説

(1) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{4}{3}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$

(2) $0.09^{1.5}=0.09^{\frac{3}{2}}=(0.3^2)^{\frac{3}{2}}=0.3^{2\times\frac{3}{2}}=0.3^3=0.027$

別解 $0.09^{1.5}=\left(\dfrac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}=\left\{\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(\dfrac{3}{10}\right)^3=\dfrac{27}{1000}=0.027$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

別解 $\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$ であるから　$\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=2$

(4) $\sqrt{2}\div\sqrt[4]{4}\times\sqrt[12]{32}\div\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{2}{4}}\times2^{\frac{5}{12}}\div2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$

(5) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}\sqrt[3]{1.5}}=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{1}{2}}\cdot3^0=\sqrt{2}$

(6) $\sqrt[3]{24}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-\dfrac{1}{9}}=\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\dfrac{4}{3}\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[3]{\dfrac{3}{3^3}}$

$=2\sqrt[3]{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$

$=\left(2+\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\right)\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$

9

解説

(1) $(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$=2-3=-1$

(2) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{5})^2+\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}$

$=(\sqrt[3]{5})^3-(\sqrt[3]{3})^3=5-3=2$

10

解説

(1) $2^{\frac{1}{2}}$，$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$，$8^{\frac{1}{8}}=(2^3)^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{3}{8}}$

底 2 は 1 より大きいから，$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{3}{8}$ より　$8^{\frac{1}{8}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^3}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 1 より小さいから，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$ より

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$\sqrt[4]{\dfrac{1}{125}}<\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(3) $(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]{6})^6=6$

$6<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]{6})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$

$\sqrt[6]{6}>0$，$\sqrt{2}>0$，$\sqrt[3]{3}>0$ であるから　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$