【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材①

中１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「数と式」
数学Ｔ「図形の性質」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しを
してください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

x，y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，その逆，対偶，裏を述べ，それらの真偽を調べよ。

$$xy=15 \Longrightarrow 「x=3 \text{ かつ } y=5」$$

$\boxed{2}$

次の $\boxed{\quad}$ に最も適する語句を (ア)〜(エ) から選べ。a，b，m，x，y は実数とする。

(1)　$x=y$ は $x^2=y^2$ であるための $\boxed{\quad}$。

(2)　$x=3$ は $x^2-5x+6=0$ であるための $\boxed{\quad}$。

(3)　$\angle \mathrm{A}=90°$ は，$\triangle \mathrm{ABC}$ が直角三角形であるための $\boxed{\quad}$。

(4)　$xy>0$ は $x>0$ であるための $\boxed{\quad}$。

(5)　$a \geqq 0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための $\boxed{\quad}$。

(6)　$a=b$ は $ma=mb$ であるための $\boxed{\quad}$。

(7)　$x+y>2$ は $x>1$ かつ $y>1$ であるための $\boxed{\quad}$。

(8)　A，B を 2 つの集合とする。a が $A \cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための $\boxed{\quad}$。

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない
(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

$\boxed{3}$

n は整数とする。次の命題を証明せよ。

n^3 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数である。

$\boxed{4}$

$\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

$\boxed{5}$

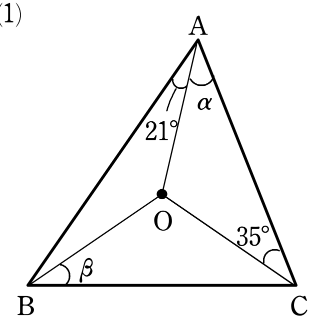
(1)　a，b が有理数，$\sqrt{l}$ が無理数のとき，$a+b\sqrt{l}=0$ ならば $a=b=0$ であることを証明せよ。

(2)　$(1+\sqrt{2})x+(-2+3\sqrt{2})y=10$ を満たす有理数 x，y の値を求めよ。

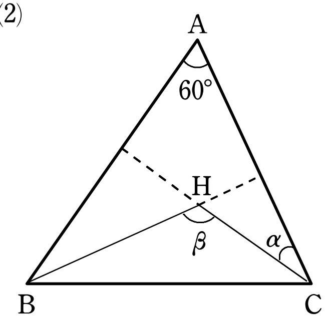
$\boxed{6}$

$\triangle \mathrm{ABC}$ の外心を O，垂心を H，内心を I とする。下の図の角 α，β を求めよ。

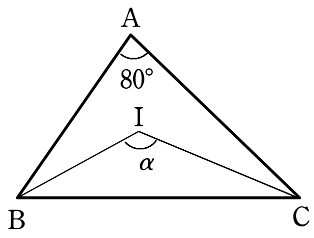
(1)



(2)



(3)



$\boxed{7}$

$\triangle \mathrm{ABC}$ の辺 AB の中点を D，辺 CA の中点を E とし，重心を G とする。次の面積比を求めよ。

(1)　$\triangle \mathrm{GED} : \triangle \mathrm{GDB}$　　(2)　四角形 ADGE : $\triangle \mathrm{ABC}$

$\boxed{8}$

AB$=10$，BC$=7$，CA$=4$ である △ABC の内心を I とする。AI と辺 BC の交点を D とするとき，次のものを求めよ。

(1) 線分 BD の長さ　　(2) AI：ID

(3) △IBD と △ABD の面積比　　(4) △IBD と △ABC の面積比

$\boxed{9}$

重心と垂心が一致する三角形は正三角形であることを証明せよ。

$\boxed{10}$

△ABC の頂角 A 内の傍心を I_a とする。次のことを証明せよ。

(1) $\angle \mathrm{AI}_a\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{C}$　　(2) $\angle \mathrm{BI}_a\mathrm{C}=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答　もとの命題は偽

逆：「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow$ $xy=15$；真

対偶：「$x\fallingdotseq 3$ または $y\fallingdotseq 5$」$\Longrightarrow$ $xy\fallingdotseq 15$；偽

裏：$xy\fallingdotseq 15$ $\Longrightarrow$「$x\fallingdotseq 3$ または $y\fallingdotseq 5$」；真

$\boxed{2}$

解答　(1)　(ウ)　(2)　(ウ)　(3)　(ウ)　(4)　(エ)　(5)　(ア)　(6)　(ウ)

(7)　(イ)　(8)　(イ)

$\boxed{3}$

解答　略

$\boxed{4}$

解答　略

$\boxed{5}$

解答　(1)　略　(2)　$x=6$，$y=-2$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\alpha=35^\circ$，$\beta=34^\circ$　(2)　$\alpha=30^\circ$，$\beta=120^\circ$　(3)　$\alpha=130^\circ$

$\boxed{7}$

解答　(1)　1：2　(2)　1：3

$\boxed{8}$

解答　(1)　5　(2)　2：1　(3)　1：3　(4)　5：21

$\boxed{9}$

解答　略

$\boxed{10}$

解答　(1)　略　(2)　略

$\boxed{1}$

解説

もとの命題は偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)

逆は　「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow$ $xy=15$　これは真である。

対偶は「$x\fallingdotseq 3$ または $y\fallingdotseq 5$」$\Longrightarrow$ $xy\fallingdotseq 15$

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)

裏は　$xy\fallingdotseq 15$ $\Longrightarrow$「$x\fallingdotseq 3$ または $y\fallingdotseq 5$」

逆が真であるから，裏も真である。

$\boxed{2}$

解説

(1)「$x=y \Longrightarrow x^2=y^2$」は明らかに真。

「$x^2=y^2 \Longrightarrow x=y$」は偽。　(反例)　$x=1$，$y=-1$

よって　(ウ)

(2)　$x=3$ のとき　$x^2-5x+6=3^2-5\cdot3+6=0$

ゆえに，「$x=3 \Longrightarrow x^2-5x+6=0$」は真。

「$x^2-5x+6=0 \Longrightarrow x=3$」は偽。　(反例)　$x=2$

よって　(ウ)

(3)「$\angle\mathrm{A}=90^\circ \Longrightarrow \triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形」は真。

「$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形 $\Longrightarrow \angle\mathrm{A}=90^\circ$」は偽。

(反例)　$\angle\mathrm{A}=30^\circ$，$\angle\mathrm{B}=90^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$

よって　(ウ)

(4)「$xy>0 \Longrightarrow x>0$」は偽。　(反例)　$x=-1$，$y=-2$

「$x>0 \Longrightarrow xy>0$」は偽。　(反例)　$x=1$，$y=-2$

よって　(エ)

(5)「$a\geqq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2}=a$」は真。

よって　(ア)

(6)　$a=b$ の両辺に m を掛けると　$ma=mb$

ゆえに，「$a=b \Longrightarrow ma=mb$」は真。

「$ma=mb \Longrightarrow a=b$」は偽。　(反例)　$m=0$，$a=1$，$b=2$

よって　(ウ)

(7)「$x+y>2 \Longrightarrow x>1$ かつ $y>1$」は偽。　(反例)　$x=5$，$y=-1$

$x>1$ かつ $y>1$ のとき　$x+y>1+y>2$

ゆえに，「$x>1$ かつ $y>1 \Longrightarrow x+y>2$」は真。

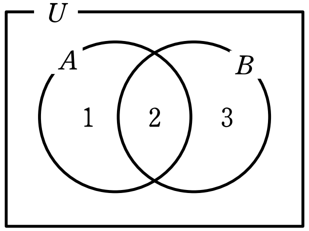
よって　(イ)

(8) 「$a \in A \cup B \Longrightarrow a \in A$」は偽。

(反例)　$A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$, $a=3$

また，$A \subset A \cup B$ であるから，「$a \in A \Longrightarrow a \in A \cup B$」は真。

よって　(イ)



3

解説

対偶「n が 3 の倍数でないならば，n^3 は 3 の倍数でない」を証明する。

3 の倍数でない整数 n は，ある整数 k を用いて $3k+1$，$3k+2$ のいずれかで表される。

[1]　$n=3k+1$ のとき

$$n^3=(3k+1)^3=27k^3+27k^2+9k+1=3(9k^3+9k^2+3k)+1$$

よって，n^3 は 3 の倍数ではない。

[2]　$n=3k+2$ のとき

$$n^3=(3k+2)^3=27k^3+54k^2+36k+8=3(9k^3+18k^2+12k+2)+2$$

よって，n^3 は 3 の倍数ではない。

したがって，対偶は真である。ゆえに，与えられた命題は真である。

4

解説

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数でないと仮定すると，r を有理数として，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}=r$ とおける。

両辺を 2 乗すると　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{6}=r^2$　　よって　$\sqrt{3}=3r^2-2$　……①

ここで，r は有理数であるから，$3r^2-2$ も有理数である。

ゆえに，① は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ は無理数である。

5

解説

(1)　$b \neq 0$ と仮定すると　$\sqrt{l}=-\dfrac{a}{b}$

a，b は有理数であるから，右辺の $-\dfrac{a}{b}$ は有理数である。

左辺の $\sqrt{l}$ は無理数であるから，これは矛盾している。

よって　$b=0$

このとき，$a+0\cdot\sqrt{l}=0$ から　$a=0$

ゆえに，a，b が有理数，$\sqrt{l}$ が無理数のとき

$a+b\sqrt{l}=0$ ならば $a=b=0$

(2)　与式を変形して

$$(x-2y-10)+(x+3y)\sqrt{2}=0$$

x，y は有理数であるから，$x-2y-10$，$x+3y$ は有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数である。

ゆえに　$x-2y-10=0$，$x+3y=0$

よって　$x=6$，$y=-2$

6

解説

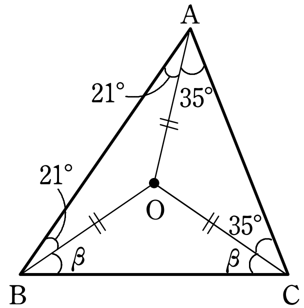
(1)　O は △ABC の外心であるから　OA＝OB＝OC

よって，△OCA は OA＝OC の二等辺三角形であるから

$\angle$OAC＝$\angle$OCA

すなわち　$\alpha=35°$

同様に，△OAB は OA＝OB の二等辺三角形，△OBC は OB＝OC の二等辺三角形であるから，右の図のようになる。



△ABC の内角の和は 180° であるから

$$2\times35°+2\times21°+2\times\beta=180°$$

よって　$\beta=34°$

(2)　右の図のように，BH の延長と辺 CA の交点を D，
CH の延長と辺 AB の交点を E とする。
H は △ABC の垂心であるから

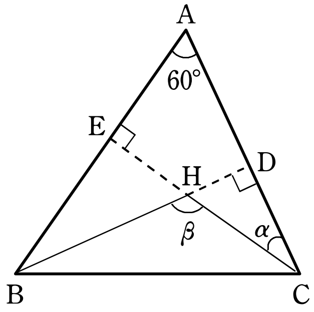
$$CE \perp AB,\ BD \perp CA$$

よって　$\angle AEC = 90^\circ,\ \angle BDC = 90^\circ$

△AEC の内角の和は 180° であるから

$$60^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

ゆえに　$\alpha = 30^\circ$



また，△CDH において，頂点 H における外角は ∠C と ∠D の和に等しいから

$\beta = \alpha + 90^\circ$　　よって　$\beta = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$

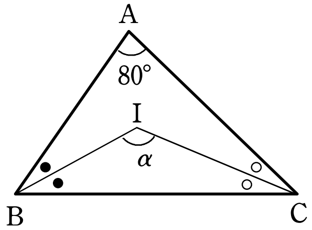
(3)　$\angle B = 2\angle IBC,\ \angle C = 2\angle ICB$ であるから，
△ABC において

$$80^\circ + 2\angle IBC + 2\angle ICB = 180^\circ$$

よって　$\angle IBC + \angle ICB = 50^\circ$

したがって，△IBC において

$$\alpha = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB)$$
$$= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$



7

(解説)

(1)　G は △ABC の重心であるから　GE : GB = 1 : 2
△GED と △GDB は底辺をそれぞれ GE，GB とすると，
高さが等しいから

$$\triangle GED : \triangle GDB = GE : GB = 1 : 2$$

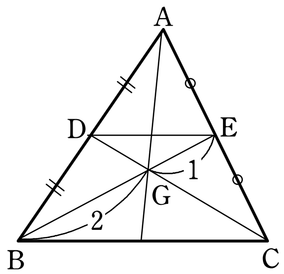
(2)　△GED の面積を S とする。
AD = DB であるから　△ADE = △BED
(1) より △BED = 3△GED = $3S$ であるから

$$\triangle ADE = 3S$$

よって　(四角形 ADGE) = △ADE + △GED
$= 3S + S = 4S$　……①

また　$\triangle ABE = 2\triangle ADE = 2 \times 3S = 6S$

△ABC = 2△ABE であるから　$\triangle ABC = 2 \times 6S = 12S$　……②

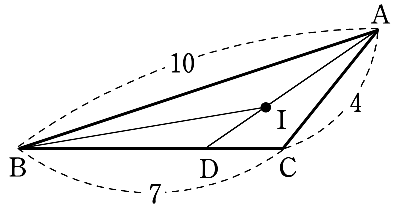


①，② から　四角形 ADGE : △ABC = $4S : 12S = 1 : 3$

8

(解説)

I は △ABC の内心であるから，3 つの内角の二
等分線の交点である。



(1)　△ABC において，AD は ∠A の二等分線で
あるから　AB : AC = BD : DC
すなわち　10 : 4 = BD : (7 − BD)
よって　10(7 − BD) = 4BD
これを解いて　BD = 5

(2)　△ABD において，BI は ∠B の二等分線であるから

$$BA : BD = AI : ID$$

よって　AI : ID = 10 : 5 = 2 : 1

(3)　△IBD と △ABD は底辺をそれぞれ ID，AD とすると，高さが等しいから

$$\triangle IBD : \triangle ABD = ID : AD = 1 : 3$$

(4)　△ABD と △ABC は底辺をそれぞれ BD，BC とすると，高さが等しいから

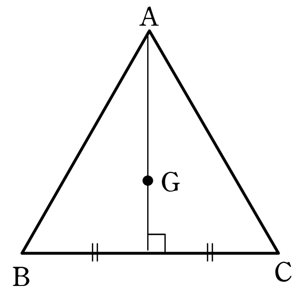
$$\triangle ABD : \triangle ABC = BD : BC = 5 : 7$$

このことと (3) から　△IBD : △ABC = 5 : 21

9

(解説)

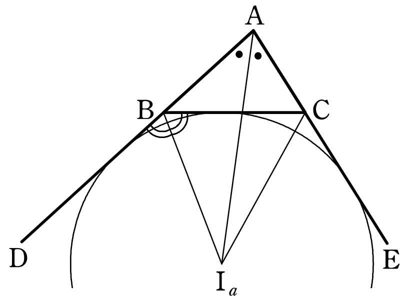
△ABC の重心と垂心が一致するとき，その点を G とする。
G は垂心であるから　AG ⊥ BC
また，G は重心であるから，直線 AG は辺 BC の中点を通
る。
よって，直線 AG は辺 BC の垂直二等分線であるから，
△ABC は AB = AC の二等辺三角形である。
同様にして，△ABC は BC = BA の二等辺三角形である
ことも示される。
したがって，AB = BC = CA であるから，△ABC は正三角形である。



$\boxed{10}$

(解説)

辺 AB，AC の B，C を越える延長上に，それぞれ点 D，E をとる。



(1) $\angle \mathrm{AI}_a\mathrm{B} = \angle \mathrm{I}_a\mathrm{BD} - \angle \mathrm{I}_a\mathrm{AB}$

$$= \frac{1}{2}\angle \mathrm{CBD} - \frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$$

$$= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{CBD} - \angle \mathrm{A})$$

$$= \frac{1}{2}\angle \mathrm{C}$$

(2) $\angle \mathrm{AI}_a\mathrm{C} = \angle \mathrm{I}_a\mathrm{CE} - \angle \mathrm{I}_a\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BCE} - \frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$

$$= \frac{1}{2}(\angle \mathrm{BCE} - \angle \mathrm{A}) = \frac{1}{2}\angle \mathrm{B}$$

よって　$\angle \mathrm{BI}_a\mathrm{C} = \angle \mathrm{AI}_a\mathrm{B} + \angle \mathrm{AI}_a\mathrm{C} = \frac{1}{2}(\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C})$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle \mathrm{A}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle \mathrm{A}$$