

1

$f(x) = e^x - x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数 x について $f(x) \geq 1$ であることを示せ。
- (2) t は実数とする。このとき、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t$, $x = t - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

2

定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ を求めよ。

3

1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき、1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。

4

4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 a_1, a_2, \dots, a_n とする。

- (1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、 $j = 1, 2, 3, 4$ とする。
 - (ア) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。
 - (イ) $n \geq 2$ のとき、 $A_n(j)$ ($j = 3, 4$) を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$ で表し、 $A_n(3), A_n(4)$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

5

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき、 a, b, c, d を p を用いて表せ。