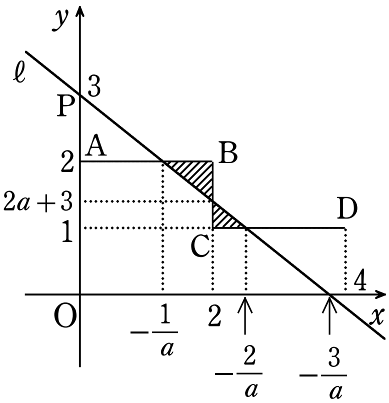
$\boxed{1}$

(解説)



(1)　直線 ℓ の方程式は　　$y=ax+3$

ℓ と直線 $x=2$ の交点の y 座標は　　$2a+3$

よって，ℓ が線分 BC と 2 点 B，C 以外で交わるための条件は　　$1<2a+3<2$

ゆえに，求める a の値の範囲は　$-1<a<-\frac{1}{2}$

(2)　$y=ax+3\left(\text{ただし } -1<a<-\frac{1}{2}\right)$ において

$y=2$ とすると　$x=-\frac{1}{a}$

$y=1$ とすると　$x=-\frac{2}{a}$

$y=0$ とすると　$x=-\frac{3}{a}$

ゆえに，直線 ℓ と線分 AB，線分 CD，x 軸の交点の x 座標は，それぞれ

$$-\frac{1}{a},\ -\frac{2}{a},\ -\frac{3}{a}$$

よって　　$V_1=\pi\cdot 2^2\left(2+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\left(-\frac{3}{a}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{3}\pi(2a+3)^2\left(-\frac{3}{a}-2\right)$

$=\pi\left(-\frac{8}{3}a^2-12a-\frac{7}{3a}-10\right)$

また　　$V_2=\frac{1}{3}\pi(2a+3)^2\left(-\frac{3}{a}-2\right)-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\left(-\frac{3}{a}+\frac{2}{a}\right)-\pi\cdot 1^2\left(-\frac{2}{a}-2\right)$

$=\pi\left(-\frac{8}{3}a^2-12a-\frac{20}{3a}-16\right)$

ゆえに　　$V=V_1+V_2=\pi\left(-\frac{16}{3}a^2-24a-\frac{9}{a}-26\right)$

(3)　(2) から　　$\frac{dV}{da}=\pi\left(-\frac{32}{3}a-24+\frac{9}{a^2}\right)=\frac{-\pi(32a^3+72a^2-27)}{3a^2}$

$=\frac{-\pi(4a+3)(8a^2+12a-9)}{3a^2}$

ここで　　$8a^2+12a-9=8\left(a-\frac{-3-3\sqrt{3}}{4}\right)\left(a-\frac{-3+3\sqrt{3}}{4}\right)$，

$\frac{-3-3\sqrt{3}}{4}<-1$，$-\frac{1}{2}<\frac{-3+3\sqrt{3}}{4}$

よって，$-1<a<-\frac{1}{2}$ のとき　　$8a^2+12a-9<0$

ゆえに，$-1<a<-\frac{1}{2}$ において $\frac{dV}{da}=0$ とすると，$4a+3=0$ から　　$a=-\frac{3}{4}$

V の増減表は次のようになる。

a	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，V は $a=-\frac{3}{4}$ のとき最小値をとる。

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　C$(p,\ q,\ r)$ $(r>0)$ とおくと　　$p^2+q^2+r^2=1$　$\cdots\cdots$ ①

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{COA}=\cos\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{COB}=\cos\theta$$

一方，内積を成分で計算すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\cos\frac{\alpha}{2}+q\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=p\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+q\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)=p\cos\frac{\alpha}{2}-q\sin\frac{\alpha}{2}$$

よって
$$\begin{cases} p\cos\dfrac{\alpha}{2}+q\sin\dfrac{\alpha}{2}=\cos\theta & \cdots\cdots ② \\ p\cos\dfrac{\alpha}{2}-q\sin\dfrac{\alpha}{2}=\cos\theta & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②＋③ から　　$2p\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cos\theta$　　　　②－③ から　　$2q\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$

$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$ であるから　　$p=\dfrac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$，$q=0$

① に代入して
$$\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2+r^2=1$$

$r>0$ であるから
$$r=\sqrt{1-\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2}$$

したがって，点 C の座標は
$$\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2}\right)$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角は α であるから　　$\alpha=\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ のなす角も θ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\cos\theta$

一方，内積を成分で計算すると，D の座標は C の z 座標を負にしたものであるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\right)^2-\left\{1-\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\right)^2\right\}$$

よって
$$\cos\theta=2\left(\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\right)^2-1 \quad \cdots\cdots ④$$

分母を払うと　$\cos^2\dfrac{\theta}{2}\cos\theta=2\cos^2\theta-\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ であるから　$\dfrac{1+\cos\theta}{2}\cdot\cos\theta=2\cos^2\theta-\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

整理すると　$3\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$(3\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

$0<\theta<\pi$ より　$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$　このとき ④ から　$\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$

$\cos\theta<0$ で，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ であるから

$$\frac{\cos\theta}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

z 座標は　$\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

以上から，点 C の座標は　$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\boxed{3}$

(解説)

関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点は，方程式

$$|2x^2+ax-1|=|x^2-2| \quad \cdots\cdots(*)$$

を満たす実数 x の個数と一致する。

$(*)$ から　　$2x^2+ax-1=\pm(x^2-2)$

よって　　$x^2+ax+1=0$ ……①　　または　　$3x^2+ax-3=0$ ……②

①，② の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=a^2-4=(a+2)(a-2), \qquad D_2=a^2+36>0$$

よって，① を満たす実数 x の個数は

$|a|<2$ のとき 0 個，　$|a|=2$ のとき 1 個，　$2<|a|$ のとき 2 個

② を満たす実数 x の個数は常に 2 個である。

ここで ①，② が共通解 $x=\alpha$ をもつとすると

$\alpha^2+a\alpha+1=0$ ……①′，　　$3\alpha^2+a\alpha-3=0$ ……②′

②′−①′ から　　$\alpha^2=2$　　　よって　$\alpha=\pm\sqrt{2}$

[1]　$\alpha=\sqrt{2}$ のとき

①′ から　　$3+\sqrt{2}a=0$　　　ゆえに　$a=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，①，② の残りの解はそれぞれ解と係数の関係により $\dfrac{1}{\alpha}$，$-\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

[2]　$\alpha=-\sqrt{2}$ のとき

①′ から　　$3-\sqrt{2}a=0$　　　ゆえに　$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

このとき，①，② の残りの解はそれぞれ解と係数の関係により $\dfrac{1}{\alpha}$，$-\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

以上から，関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点の個数は

$|a|<2$ のとき 2 個，　$|a|=2$ のとき 3 個，　$2<|a|<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 4 個，

$|a|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個，　$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<|a|$ のとき 4 個