７　図形のベクトルによる表示

$\boxed{1}$ 直線のベクトル方程式

A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$ とし，s，t は実数の変数とする。

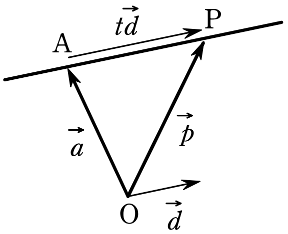
１　点 A を通り，$\vec{d}\ (\neq \vec{0})$ に平行な直線　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

２　異なる 2 点 A，B を通る直線

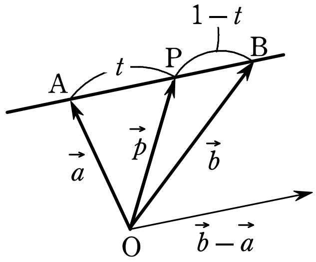
$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

または　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　ただし　$s+t=1$

１

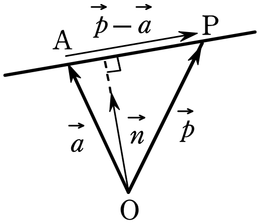


２



３　点 A を通り，$\vec{n}\ (\neq \vec{0})$ に垂直な直線

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$



$\boxed{2}$ 直線の媒介変数表示

A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ とする。

１　点 A を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(l,\ m)$ である直線

$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \longrightarrow \quad m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$$

２　異なる 2 点 A，B を通る直線　$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \end{cases}$

$$\longrightarrow \quad (y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

3　平面上の点の存在範囲

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，点 P の存在範囲は次のようになる。

1　$s+t=1$ のとき　直線 AB

2　$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき　線分 AB

3　$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ のとき　△OAB の周および内部

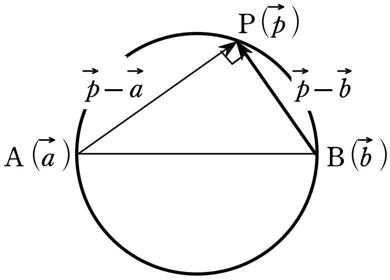
4　円のベクトル方程式

1　中心 C$(\vec{c})$，半径 r の円

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

2　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$



第５講　例題

$\boxed{1}$★★☆

次の直線のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて，成分表示で求めよ。また，媒介変数 t を消去した式で表せ。

(1)　点 A $(-4,\ 2)$ を通り，ベクトル $\vec{d}=(3,\ -1)$ に平行な直線

(2)　2 点 A $(-3,\ 5)$，B $(-2,\ 1)$ を通る直線

$\boxed{2}$★★☆

(1)　点 A $(4,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{n}=(3,\ -4)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(2)　2 直線 $2x-4y+11=0$，$x+3y-12=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

$\boxed{3}$★★☆

(1)　線分 AB の垂直二等分線を ℓ とし，ℓ 上の点を P とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ として，ℓ のベクトル方程式を求めよ。

(2)　△ABC の重心を G，辺 BC の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b}$ とする。
点 M を通り，辺 CA に平行な直線上の点を P とし，$\overrightarrow{\mathrm{GP}}=\vec{p}$ とする。この直線のベクトル方程式を，$\vec{p}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて求めよ。

$\boxed{4}$★★☆

次の点 P に対するベクトル方程式はどのような図形を表すか答えよ。

(1)　平面上の異なる 2 つの定点 A，B に対して　$\left|3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=5$

(2)　平面上の △ABC と任意の点 P に対して　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3$

(3)　平面上の相異なる 3 点 O, A, B に対して　$\left|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$

(4)　平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対して　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$

(5)　平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P に対して　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

(6)　平面上の △OAB と任意の点 P に対して　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\boxed{5}$★★★

△OAB について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら変わるとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$0\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 3$

(2)　$s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$2s+3t=6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(4)　$0\leqq s+t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(5)　$0\leqq 3s+2t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

第５講　例題演習

$\boxed{1}$

A$(-1,\ 5)$，B$(2,\ 4)$，$\vec{d}=(1,\ -2)$ とする。次の直線のベクトル方程式を媒介変数 t を用いて，成分表示で求めよ。また，媒介変数 t を消去した式で表せ。

(1)　A を通り，$\vec{d}$ に平行な直線　　　(2)　2 点 A，B を通る直線

$\boxed{2}$

(1)　次の点 A$(3,\ -2)$ を通り，$\vec{n}=(-4,\ 1)$ が法線ベクトルである直線の方程式を求めよ。

(2)　2 直線 $x-3y+5=0$，$2x+4y+3=0$ のなす鋭角を求めよ。

$\boxed{3}$

△ABC の頂点 A，B，C の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とする。直線上の点を P$(\vec{p})$ として，次の直線のベクトル方程式を求めよ。

(1)　A から直線 BC への垂線　　　(2)　A と辺 BC の中点を通る直線

(3)　辺 BC の垂直二等分線

$\boxed{4}$

次の点 P に対するベクトル方程式はどのような図形を表すか答えよ。

(1)　平面上の異なる 2 つの定点 A，B に対して　$\left|4\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}\right|=7$

(2)　平面上の △ABC と任意の点 P に対して　$\left|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}\right|=6$

(3)　平面上の △ABC と任意の点 P に対して　$\left|\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$

(4)　平面上の異なる 2 つの定点 O，A と任意の点 P 対して　$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|=\left|\vec{p}-5\vec{a}\right|$

(5)　平面上の定点 O，A に対して　$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2-4\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=0$

(6)　平面上の △OAB と任意の点 P に対して　$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{OA}\cdot(2\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})$

$\boxed{5}$

△OAB について，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら変わるとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，$1\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 1$　　(2)　$s+t=4$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(3)　$s+6t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(4)　$0\leqq s+t\leqq 3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

(5)　$0\leqq 2s+3t\leqq 6$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

第５講　レベルＡ

$\boxed{1}$

(1)　中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 r の円 C 上の点 $\mathrm{P_0}(\vec{p_0})$ における円の接線のベクトル方程式は $(\vec{p_0}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ $(r>0)$ であることを示せ。

(2)　円 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は $x_0x+y_0y=r^2$ であることを，ベクトルを用いて証明せよ。

$\boxed{2}$ [(1) 神奈川大，(2) 東北学院大，(3) 兵庫医科大]

(1)　ベクトル $\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{p}=(x,\ y)$ が $|\vec{p}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{p}+48=0$ を満たすとき，点 $(x,\ y)$ の描く図形の方程式を求めよ．

(2)　xy 平面上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ に対して，

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}})=0$$

を満たす xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の描く図形の方程式を求めよ．

(3)　座標平面上に定点 $\mathrm{A}(2,\ 2)$，$\mathrm{B}(7,\ -3)$ があり，点 P が $2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を満たすように動くとき，点 P が描く図形の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ [明治大]

平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ を満たし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，$2\vec{a}-3\vec{b}$ と $2\vec{a}+\vec{b}$ のなす角を θ とすれば，$\cos\theta=$ ア $\boxed{}$ である。また，円のベクトル方程式 $(\vec{p}-2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{p}-2\vec{a}-\vec{b})=0$ で定まる円の半径は，イ $\boxed{}$ である。

$\boxed{4}$ [愛知教育大]

$\triangle\mathrm{OAB}$ がある．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されるベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の終点 P の集合は，α，β が次の条件を満たすとき，それぞれどのような図形を表すか．O, A, B を適当にとって図示せよ．

(1)　$\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{3}=1$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$

(2)　$1\leqq\alpha+\beta\leqq 2$，$0\leqq\alpha\leqq 1$，$0\leqq\beta\leqq 1$

(3)　$\beta-\alpha=1$，$\alpha\geqq 0$

第５講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [旭川医科大]

a を正の定数とする。AB$=a$，AC$=2a$，$\angle$BAC$=\dfrac{2}{3}\pi$ である △ABC と，

$\left|2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|=a$ を満たす動点 P がある。

(1)　辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とするとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|$ を求めよ。

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|$ の最大値を求めよ。

(3)　線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$

△OAB において，次の条件を満たす点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s+t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$

$\boxed{3}$ [横浜国立大]

平面上に △OAB があり，OA$=5$，OB$=6$，AB$=7$ を満たしている。s，t を実数とし，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定める。

(1)　△OAB の面積を求めよ。

(2)　s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq s+t\leqq 2$ を満たすとき，点 P が存在しうる部分の面積を求めよ。

(3)　s，t が $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$1\leqq 2s+t\leqq 2$，$s+3t\leqq 3$ を満たすとき，点 P が存在しうる部分の面積を求めよ。

章末問題A

$\boxed{1}$

平面上の相異なる3点O，A，Bに対して，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$，

$\vec{q}=\dfrac{-\vec{a}+2\vec{b}}{4}$ とする。$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるような2点P，Qをとる。$|\vec{p}|=4$，

$|\vec{q}|=1$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ のとき，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を求めよ。

(2)　2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるとき，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を求めよ。

$\boxed{2}$ [新潟大]

平行四辺形ABCDにおいて，辺ABを3：2に内分する点をE，辺BCを1：2に内分する点をF，辺CDの中点をMとする．線分CEと線分FMの交点をP，線分APの延長と辺BCとの交点をQとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

(2)　FQ：QCを求めよ.

$\boxed{3}$ [群馬大]

座標平面上の2点を $\mathrm{A}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta, \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$ とする.
Oを原点とするとき

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを求めよ.

(2)　$\theta=45^\circ$ のとき，2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ.

(3)　(2)のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさを求めよ.

(4)　2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が垂直になるように θ を定めよ．ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ とする.

$\boxed{4}$ [神戸商科大]

$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする。点Aで直線OAに接する円の中心Cが $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ で表せ。

5 [鹿児島大]

平面に四角形ABCDがあり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくとき，頂点Cは

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{d}$$

を満たすものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 直線ABとDCの交点をE，直線ADとBCの交点をFとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) 線分BDの中点をQ，線分EFの中点をRとするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ。

(3) 線分ACの中点をPとするとき，3点P，Q，Rは同一直線上にあることを証明せよ。

6 [大阪府立大]

OA＝OB＝1を満たす二等辺三角形OABにおいて，辺ABを1：3に内分する点をP，辺OBの中点をQ，直線OPと直線AQの交点をR，直線BRと辺OAの交点をSとし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。このとき，直線BSは辺OAと直交しているとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BS}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(4) 三角形OABの面積を求めよ。

7 [香川大]

平行四辺形ABCDは，AB＝2，AD＝3，$\cos\angle\mathrm{BAD}=\frac{1}{3}$ を満たしているとする。直線BC上にBC⊥APとなる点Pをとり，直線BD上にBD⊥AQとなる点Qをとる。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) APの長さとAQの長さを求めよ。

(4) PQの長さを求めよ。

$\boxed{8}$ [東京都市大]

3 点 O (0, 0), A (6, 3), B (2, 4) を頂点とする △OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が条件 $0 \leqq s+t \leqq \dfrac{1}{2}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲が △OA′B′ の周および内部であるとすると，点 A′ の座標は $^{ア}\boxed{}$，点 B′ の座標は $^{イ}\boxed{}$ である。ただし，点 A′ は直線 OA 上，点 B′ は直線 OB 上にあるものとする。

また，3 点 O (0, 0), C $\left(9,\ \dfrac{9}{2}\right)$, D (3, 6) を頂点とする △OCD に対し，$\overrightarrow{OQ}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$ とする。点 Q の存在範囲が点 P の存在範囲と一致するとき，実数 s' と t' の満たす条件は $^{ウ}\boxed{}$ である。

$\boxed{9}$ [山梨大]

O を原点とする座標平面上に，半径 r，中心の位置ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の円 C を考え，その円周上の点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP}$ とする．また，円 C の外部に点 B を考え，その位置ベクトルを $\overrightarrow{OB}$ とする．更に，点 B と点 P の中点を Q，その位置ベクトルを $\overrightarrow{OQ}$，点 P が円周上を動くとき点 Q が描く図形を D とする．

(1) 円 C を表すベクトル方程式を求めよ．

(2) 図形 D を表すベクトル方程式を求めよ．

(3) $r=1$，$\overrightarrow{OA}=(2,\ 5)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,\ -1)$ のとき，$\overrightarrow{OQ}=(x,\ y)$ とおいて図形 D を表す方程式を求めよ．また，図形 D と y 軸との共有点の座標を求めよ．

章末問題B

1 [大阪大]

平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を 1：2 に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。　　(2) t の値を求めよ。

(3) AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

2 [北海道大]

$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1) $\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1) の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t を求めよ。

3 [神戸大]

平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 2：3 に内分する点を M，辺 AB を 2：3 に内分する点を N，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を L とし，AL と CN の交点を P とする.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，t を用いて表せ.

(2) 3 点 P，M，D が一直線上にあるとき，t の値を求めよ.

4 [京都大]

$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{3}{5}$ とする。このとき，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の，O を原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{5}$ [横浜国立大]

$\triangle$ABCがあり，AB$=3$，BC$=7$，CA$=5$を満たしている。$\triangle$ABCの内心をI，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$を$\vec{b}$と$\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　$\triangle$ABCの面積を求めよ。

(3)　辺AB上に点P，辺AC上に点Qを，3点P，I，Qが一直線上にあるようにとるとき，$\triangle$APQの面積Sのとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$ [島根大]

平面上に一辺の長さが1の正三角形OABと，辺AB上の点Cがあり，AC$<$BCとする。点Aを通り直線ABに直交する直線kと，直線OCとの交点をDとする。$\triangle$OCAと$\triangle$ACDの面積の比が$1:2$であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる$m$，$n$の値を求めよ。

(2)　点Dを通り，直線ODと直交する直線をℓとする。ℓと直線OA，OBとの交点をそれぞれE，Fとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となる$s$，$t$の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [大阪府立大]

平面上に4点O，A，B，Cがあり，点Oを始点とするそれぞれの位置ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とし，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{10}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=8$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=20$が成り立つとする。

(1)　$\vec{c}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ。

(2)　点Cから直線ABに下ろした垂線と直線ABの交点をHとする。このとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$を用いて表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$を求めよ。

(3)　実数s，tに対して，点Pを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$で定める。$s$，$t$が条件$(s+t-1)(s+3t-3)\leqq 0$を満たしながら変化するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|$の最小値を求めよ。

$\boxed{8}$ [静岡大]

平面上に$\triangle$ABCがある。実数a，b，cは条件

(a)　$a<0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c\neq 0$

を満たし，点Pは$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$を満たしている。また，辺BCを$c:b$に内分する点をDとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて表せ。

(2)　a，b，cが条件(a)を満たしながら動くとき，Pの存在範囲を図示せよ。

$\boxed{9}$ [岡山大]

原点をOとする座標平面上に，点 A$(2,\ 0)$ を中心とする半径1の円 C_1 と，点 B$(-4,\ 0)$ を中心とする半径2の円 C_2 がある。点Pは C_1 上を，点Qは C_2 上を，それぞれ独立に，自由に動きまわるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$ とするとき，点Sが動く範囲を図示せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$ とするとき，点Rが動く範囲を図示せよ。

章末問題C

$\boxed{1}$ [東北大]

平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す。$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ $(0°<\theta<180°)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ [一橋大]

平面ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は次の (A)，(B) を満たす。

(A)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\sqrt{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　(B)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないことを示せ。

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [東京大]

$\triangle$ABC において $\angle\mathrm{BAC}=90°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が

$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1)　$\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [東京大]

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を 2：1 に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ [京都大]

$\triangle$ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。

$\boxed{6}$［大阪大］

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A，B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を 1：2 に内分する点を R とする。いま，k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，Q＝A のときは R＝A とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

(1)　点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P が描く図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(2)　円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。