$\boxed{1}$

(解説)

A，B の 2 人のさいころの目の出方は全部で　　$20\times 20=400$ (通り)

A，B のさいころの目の組を $(A,\ B)$ と表すと，A の得点とその場合の数は次のようになる。

　2 点のとき　$(A,\ B)=(2,\ 1)$ の 1 通り

　3 点のとき　$(A,\ B)=(3,\ 1),\ (3,\ 2)$ の 2 通り

　4 点のとき　$(A,\ B)=(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)$ の 3 通り

　　……　　　　……

　20 点のとき　$(A,\ B)=(20,\ 1),\ (20,\ 2),\ \cdots\cdots,\ (20,\ 19)$ の 19 通り

1 点のときは 0 通りである。

また，0 点のときは n 通りであるとする。

よって，求める期待値は

$$0\times\frac{n}{400}+1\times\frac{0}{400}+2\times\frac{1}{400}+3\times\frac{2}{400}+4\times\frac{3}{400}+\cdots\cdots+20\times\frac{19}{400}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\left\{k\times\frac{k-1}{400}\right\}=\frac{1}{400}\sum_{k=1}^{20}(k^2-k)$$

$$=\frac{1}{400}\left(\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41-\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21\right)=\frac{133}{20}$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$f(x)=xe^x-x^2-ax$ から　　$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x-2x-a=(x+1)e^x-2x-a$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きが -1 であるから　　$f'(0)=-1$

すなわち　　$1-a=-1$　　　　よって　　$a=2$

(2)　(1) より，$a=2$ であるから

$$f(x)=xe^x-x^2-2x,\quad f'(x)=(x+1)e^x-2x-2=(x+1)(e^x-2)$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=-1,\ \log 2$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $1-\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	極小 $-(\log 2)^2$	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は

$x=-1$ で極大値 $1-\dfrac{1}{e}$ をとり，

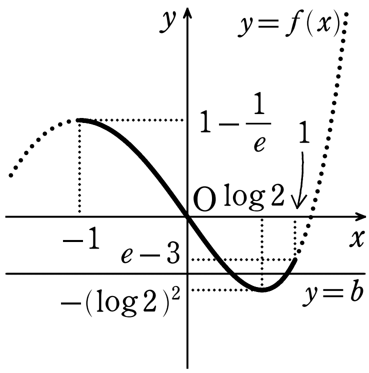
$x=\log 2$ で極小値 $-(\log 2)^2$ をとる。

(3)　$y=xe^x$，$y=x^2+2x+b$ から　　$xe^x=x^2+2x+b$

よって　　$xe^x-x^2-2x=b$

ゆえに，2 つの曲線 $y=xe^x$ と $y=x^2+2x+b$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲での共有点の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲での共有点の個数と一致する。

$\log 2<\log e=1$ かつ $f(1)=e-3$ であるから，右の図より



$b<-(\log 2)^2$，$1-\dfrac{1}{e}<b$ のとき　　0 個

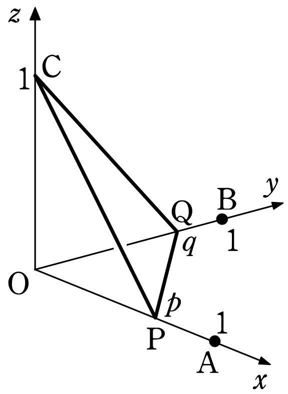
$b=-(\log 2)^2$，$e-3<b\leqq 1-\dfrac{1}{e}$ のとき　　1 個

$-(\log 2)^2<b\leqq e-3$ のとき　　2 個

$\boxed{3}$

(解説)

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$ であるから，座標空間に四面体OABCをとり，Oを原点，直線OA，OB，OCを右の図のように，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸とする。



このとき，頂点A，B，Cの座標は

$A(1, 0, 0)$，$B(0, 1, 0)$，$C(0, 0, 1)$

また，点P，Qの座標は　$P(p, 0, 0)$，$Q(0, q, 0)$

ただし，$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$，$pq = \dfrac{1}{2}$ である。

(1)　p，q は $p+q=t$，$pq=\dfrac{1}{2}$ を満たすから，2次方程式

$X^2 - tX + \dfrac{1}{2} = 0$ ……① の解である。

t のとりうる値の範囲は，2次方程式①の2つの実数解が $0 \leqq X \leqq 1$ の範囲にあるような t の値の範囲と一致する。

$f(X) = X^2 - tX + \dfrac{1}{2}$ とおく。

2次方程式①の実数解が $0 \leqq X \leqq 1$ の範囲にある条件は

[1]　2次方程式①の判別式を D とすると　$D \geqq 0$

[2]　$Y = f(X)$ のグラフの軸について　$0 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq 1$

[3]　$f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$

[1] について　$D = t^2 - 2 \geqq 0$　したがって　$t \leqq -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} \leqq t$　……②

[2] について　$0 \leqq t \leqq 2$　……③

[3] について　$f(0) = \dfrac{1}{2}$ より，$f(0) \geqq 0$ は成り立つ。

$f(1) = \dfrac{3}{2} - t \geqq 0$ より　$t \leqq \dfrac{3}{2}$　……④

②，③，④の共通範囲を求めて，t のとりうる値の範囲は　$\sqrt{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{2}$

(2)　$\overrightarrow{CP} = (p, 0, -1)$，$\overrightarrow{CQ} = (0, q, -1)$

したがって　$|\overrightarrow{CP}|^2 = p^2 + 0^2 + (-1)^2 = p^2 + 1$，

$|\overrightarrow{CQ}|^2 = 0^2 + q^2 + (-1)^2 = q^2 + 1$，

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = p \times 0 + 0 \times q + (-1) \times (-1) = 1$

よって　$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CP}|^2 |\overrightarrow{CQ}|^2 - (\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ})^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)-1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+p^2+q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(pq)^2+(p+q)^2-2pq}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+t^2-2\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\frac{3}{4}}$$

(3)　(1) より，$\sqrt{2}\leqq t\leqq\frac{3}{2}$ であるから，S は $t=\sqrt{2}$ のとき，最小値 $\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$ をとる。

このとき，p，q は 2 次方程式 $X^2-\sqrt{2}X+\frac{1}{2}=0$ の解である。

この 2 次方程式を解くと，$\left(X-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$ より　　$X=\frac{1}{\sqrt{2}}$

したがって　　$p=q=\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，S は $p=q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ をとる。

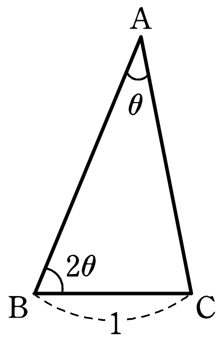
4

解説

$\angle\mathrm{A}=\theta$ とおくと　$\angle\mathrm{B}=2\theta$，$\angle\mathrm{C}=\pi-(\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B})=\pi-3\theta$

また，$0<\angle\mathrm{A}<\pi$ かつ $0<\angle\mathrm{B}<\pi$ かつ $0<\angle\mathrm{C}<\pi$ であるから

$$0<\theta<\frac{\pi}{3}\quad\cdots\cdots①$$



$\triangle\mathrm{ABC}$ において，正弦定理により　　$\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{CB}}{\sin\angle\mathrm{A}}$

よって　　$\mathrm{CA}=\frac{\sin\angle\mathrm{B}}{\sin\angle\mathrm{A}}\mathrm{CB}=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\cdot 1=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$

ゆえに，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\sin\angle\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 1\cdot\sin(\pi-3\theta)$$

$$=\sin 3\theta\cos\theta=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(2\sin 2\theta\cos 2\theta+\sin 2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta(2\cos 2\theta+1)$$

$\cos 2\theta=x$ とおくと，① より，$0<2\theta<\frac{2}{3}\pi$ であるから　　$-\frac{1}{2}<x<1\quad\cdots\cdots②$

$\sin 2\theta>0$ から　　$\sin 2\theta=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=\sqrt{1-x^2}$

よって　　$S=\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}(2x+1)=\frac{1}{2}\sqrt{(1-x^2)(2x+1)^2}$

ここで，$f(x)=(1-x^2)(2x+1)^2$ とおくと

$$f(x)=(1-x^2)(4x^2+4x+1)=-4x^4-4x^3+3x^2+4x+1$$

ゆえに　　$f'(x)=-16x^3-12x^2+6x+4=-2(2x+1)(4x^2+x-2)$

$f'(x)=0$ とすると，② から　　$x=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$

$-\frac{1}{2}<x<1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{33}-1}{8}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$f\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)>0$ から，$f(x)$ が最大であるとき，S も最大である。

求める $\cos\angle\mathrm{B}$ は，S を最大にする x の値であるから　　$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$

$\boxed{\text{別解}}$　$S=\frac{1}{2}(\sin 4\theta+\sin 2\theta)$ を導くまでは同様。

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{1}{2}(4\cos 4\theta+2\cos 2\theta)=2(2\cos^2 2\theta-1)+\cos 2\theta$$

$$=4\cos^2 2\theta+\cos 2\theta-2$$

① より，$0<2\theta<\frac{2}{3}\pi$ であるから　　$-\frac{1}{2}<\cos 2\theta<1$

$\frac{dS}{d\theta}=0$ とすると，$-\frac{1}{2}<\cos 2\theta<1$ から　　$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$

$0<2\theta<\frac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos 2\theta$ は単調減少であるから，この範囲で，

$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$ となる θ はただ 1 つ存在する。

これを満たす θ の値を α とすると，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ における S の増減表は右のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって，S は $\theta=\alpha$ で最大値をとる。
このとき，求める $\cos\angle\mathrm{B}$ は

$$\cos\angle\mathrm{B}=\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{33}-1}{8}$$

注意　別解は，数学Ⅲで学習する「微分法」の内容を利用している。