1

解説

(1)　32 は 4 の倍数であるが 6 の倍数ではないから

$$32 \in P \cap \overline{Q}$$　(ア ②)

50 は 4 の倍数でも 6 の倍数でも 24 の倍数でもないから

$$50 \in \overline{P} \cap \overline{Q} \cap \overline{R}$$　(イ ⑤)

(2)　4 と 6 の最小公倍数は 12 であるから，$P \cap Q$ に属する自然数のうち最小のものは

ウエ 12

また，12 は 24 の倍数ではないから　　$12 \notin R$　(オ ④)

(3)　(2) より，12 は条件 p かつ q を満たすが，条件 r を満たさない。

これは，命題「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」の反例である。　(カ ③)

2

解説

(1)　2 回投げて持ち点が -2 点になるのは，2 回とも裏が出る場合であるから，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イ}4}$$

2 回投げて持ち点が 1 点になるのは，表がちょうど 1 回出る場合であるから，その確率は

$$ {}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{{}^{ウ}1}{{}^{エ}2}$$

(2)　持ち点が再び 0 点になりうるのは，オ3 回投げ終わったときである。

3 回投げて持ち点が 0 点になるのは，表がちょうど 1 回出る場合であるから，その確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{{}^{カ}3}{{}^{キ}8}$$

(3)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点であるのは，持ち点が再び 0 点にならない場合，すなわち 5 回投げ終わった時点でゲームが終了する場合で，かつ 5 回のうち表がちょうど 3 回出る場合である。

(2) より，3 回投げ終わった時点で表がちょうど 1 回出た場合，その時点でゲームが終了してしまうから，その場合を除いた次の 2 つの場合を考える。

[1]　1 ～ 3 回目で表がちょうど 2 回出て，4 ～ 5 回目で表がちょうど 1 回出る

[2]　1 ～ 3 回目はすべて表が出て，4 ～ 5 回目はともに裏が出る

[1] の確率は　${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\times{}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{32}$　　[2] の確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{32}$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{32}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{^{\text{ク}}7}{^{\text{ケコ}}32}$

(4)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点で，かつ 2 回投げ終わった時点で持ち点が 1 点であるのは，1 ～ 2 回目で表がちょうど 1 回出て，3 回目は表が出て，4 ～ 5 回目で表がちょうど 1 回出る場合であるから，その確率は　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{8}\div\dfrac{7}{32}=\dfrac{^{\text{サ}}4}{^{\text{シ}}7}$

別解　表が出ることを「○」，裏が出ることを「×」で表す。

(3)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点となる場合をすべて書き出すと，右のようになる。

1 2 3 4 5	
○○○××	…… A
○○×○×	…… B
○○××○	…… C
○×○○×	…… D
○×○×○	…… E
×○○○×	…… F
×○○×○	…… G

それぞれの事象が起こる確率は，すべて　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$

よって，求める確率は　$7\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{^{\text{ク}}7}{^{\text{ケコ}}32}$

(4)　ゲームが終了した時点で持ち点が 4 点であるとき，2 回投げ終わって持ち点が 1 点であるのは，A ～ G の 7 つの場合のうち，D ～ G の 4 つの場合である。

よって，求める確率は　$\dfrac{^{\text{サ}}4}{^{\text{シ}}7}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) ⓪ 平均値が第 1 四分位数と第 3 四分位数の間にない場合もある。(参考 を参照)
よって，正しくない。

① 四分位範囲が標準偏差より小さい場合もある。(参考 を参照)
よって，正しくない。

② 中央値に等しい観測値が 3 個以上ある場合，中央値より小さい観測値の個数は 48 個以下になる。
よって，正しくない。

③ 最大値に等しい観測値を 1 個削除すると，残りの観測値からなるデータの大きさは 98 であり，そのデータの第 1 四分位数は値の小さい方から 25 番目の値である。
これはもとのデータの第 1 四分位数と同じである。
よって，正しい。

④ 第 1 四分位数に等しい観測値が 2 個以上ある場合，第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除した残りの観測値の個数は 52 個以上になることがある。
よって，正しくない。

⑤ 第 1 四分位数より小さい観測値と，第 3 四分位数より大きい観測値とをすべて削除すると，残りの観測値からなるデータの最大値，最小値は，それぞれもとのデータの第 3 四分位数，第 1 四分位数に等しい。
ゆえに，残りの観測値からなるデータの範囲は，もとのデータの四分位範囲に等しい。
よって，正しい。

以上から　ア ③，イ ⑤　(または ア ⑤，イ ③)

参考　98 個の観測値が 0 で，残りの 1 個の観測値が 99 であるデータを考えると

平均値は $\dfrac{98\cdot 0+99}{99}=1$，　第 1 四分位数は 0，　第 3 四分位数は 0

また，四分位範囲は　$0-0=0$

標準偏差は　$\sqrt{\dfrac{1}{99}\{98\cdot(0-1)^2+(99-1)^2\}}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

(2) (Ⅰ) P 10 のデータの四分位範囲は 約 1.4 であり，1 より大きい。
よって，誤りである。

(Ⅱ) P 27 のデータの中央値は P 28 のデータの中央値より大きい。
よって，誤りである。

(Ⅲ) P 1 のデータの最大値は 約 79.3 であり，P 47 のデータの最小値は 約 81.2 である。

$81.2-79.3=1.9$ であるから，P 1 のデータのどの値と P 47 のデータのどの値とを比較しても 1.5 以上の差がある。

よって，正しい。

以上から，正誤の組合せとして正しいものは　ウ ⑥

(3)　図 2 より，最大値は 81.5 ～ 82.0 (歳) の階級に含まれる。

また，データの大きさは 20 であるから，第 1 四分位数は値の小さい方から 5 番目と 6 番目の値の平均値である。

5 番目と 6 番目の値はともに 80.0 ～ 80.5 (歳) の階級に含まれるから，第 1 四分位数は 80.0 ～ 80.5 (歳) の区間にある。

これらの条件を満たす箱ひげ図は　エ ④

(4)　図 3 より，傾きが 1 で切片が 7.0 の直線と傾きが 1 で切片が 7.5 の直線の間にある点の個数は　3

これは，男女の平均寿命の差が 7.0 より大きく 7.5 より小さい都道府県の数が 3 であることを表している。

7.0 ～ 7.5 (歳) の階級の度数が 3 であるヒストグラムは　オ ③

(5)　昭和 25 年の変動係数は　$V=\dfrac{20.1}{27.2}$

よって　$V>0.509$　(カ ②)

平成 27 年の年齢データの値すべてを 100 倍すると，平均値は元のデータの平均値の 100 倍になるから　100×48.1

各値の偏差は，元のデータの偏差の 100 倍になるから，分散は元のデータの分散の 100^2 倍になる。

よって，標準偏差は元のデータの標準偏差の 100 倍になるから　100×24.5

ゆえに，変動係数は　$\dfrac{100\times 24.5}{100\times 48.1}=\dfrac{24.5}{48.1}(=0.509)$

したがって，変動係数は変わらない。(キ ①)

平成 27 年の年齢データの値すべてに 100 を加えると，平均値は元のデータの平均値に 100 を加えた値になるから　$48.1+100$

各値の偏差は，元のデータの偏差と等しくなるから，分散は元のデータの分散と等しい。

よって，標準偏差は元のデータの標準偏差と等しいから　24.5

ゆえに，変動係数は　$\dfrac{24.5}{48.1+100}<\dfrac{24.5}{48.1}(=0.509)$

したがって，変動係数は小さくなる。(ク ⓪)

参考　a，b を定数とする。変量 x のデータから $y=ax+b$ によって新しい変量 y のデータが得られるとき，x，y のデータの平均値を $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散 ${s_x}^2$，${s_y}^2$，標準偏差を s_x，s_y とすると，次のことが成り立つ。

$$\overline{y}=a\overline{x}+b, \qquad s_y^{\,2}=a^2 s_x^{\,2}, \qquad s_y=|a|s_x$$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　C_1：$y=-x^2+x$ から　$y'=-2x+1$

C：$y=\frac{1}{2}x^2+ax+b$ から　$y'=x+a$

C と C_1 が $x=t$ で接しているから　$t+a=-2t+1$　すなわち　$a=-3t+1$ …… ①

また　$\frac{1}{2}t^2+at+b=-t^2+t$ …… ②

ゆえに，① を ② に代入すると　$b=-\frac{3}{2}t^2+t-(-3t+1)t=\frac{3}{2}t^2$

(2)　(1) から　C：$y=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2$

$x^2-x=\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2$ とすると　$x^2+2(3t-2)x-3t^2=0$

これを解くと　$x=2-3t\pm2\sqrt{3t^2-3t+1}$

この解を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とする．

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{\frac{1}{2}x^2-(3t-1)x+\frac{3}{2}t^2-(x^2-x)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}(4\sqrt{3t^2-3t+1})^3$$

$$=\frac{16}{3}(\sqrt{3t^2-3t+1})^3$$

(3)　(2) から　$S=\frac{16}{3}\left\{\sqrt{3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right\}^3$

よって，$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$ をとる．