第１２章

～　平面ベクトル　～

第１講　ベクトルの演算・成分

１　ベクトル　　２　ベクトルの演算

$\boxed{1}$　**ベクトル**

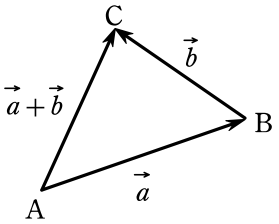
ベクトルの相等　$\vec{a}=\vec{b} \iff \vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しい

逆ベクトル $-\vec{a}$　$\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトル

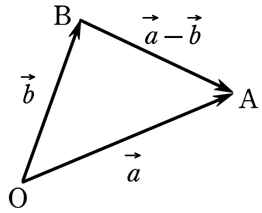
零ベクトル $\vec{0}$　大きさが 0 のベクトル，向きは考えない

$\boxed{2}$　**ベクトルの演算**

加法　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



減法　$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$



実数倍 $k\vec{a}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき　$k>0$ ならば $\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

$k<0$ ならば $\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

ベクトルの演算法則　k，l は実数

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$，　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$，　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

$\boxed{注}$　$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$，　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，　$0\vec{a}=\vec{0}$，　$k\vec{0}=\vec{0}$

$\boxed{3}$　**ベクトルの平行**

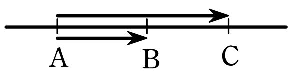
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

$\boxed{4}$　**一直線上にある点**

2 点 A，B が異なるとき

点 C が直線 AB 上にある

$\iff \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある



$\boxed{5}$　**ベクトルの分解**

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，どんなベクトル $\vec{p}$ も，適当な実数 s，t を用いて，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形でただ 1 通りに表すことができる。

$\boxed{参考}$　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は **1 次独立** であるという。

３　ベクトルの成分

$\boxed{1}$　**ベクトルの成分表示**

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$

座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$\vec{e_1}=(1,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1)$

第１講　ベクトルの演算・成分

ベクトルの成分表示

O を原点とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2) \qquad (\vec{a}\ \text{の成分表示})$$

ベクトルの相等

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

$\boxed{2}$　和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

$$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$$

$$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2) \qquad \text{ただし，}k\text{ は実数}$$

$\boxed{3}$　2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

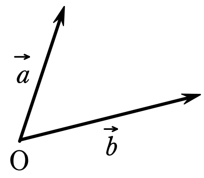
2 点 A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2), \qquad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

第１講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを，点 O を始点とする有向線分で図示せよ。



(1)　$\vec{a}+\vec{b}$　　(2)　$\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$3\vec{a}$

(4)　$-2\vec{b}$　　(5)　$3\vec{a}-2\vec{b}$

$\boxed{2}$ ★★☆

次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$　　(2)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

$\boxed{3}$ ★★☆

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OP}=5\vec{a}-4\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}-\vec{b}$ であるとき，$\overrightarrow{PQ}/\!\!/\overrightarrow{AB}$ であることを示せ。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないものとする。

(2)　$\overrightarrow{OP}=\vec{a}-3\vec{b}$，$\overrightarrow{OQ}=3\vec{a}-5\vec{b}$，$\overrightarrow{OR}=-2\vec{b}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

正六角形 ABCDEF において，中心を O，辺 CD を 2：1 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{BQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$\boxed{5}$ ★★☆

平行四辺形 ABCD において，対角線の交点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AE}=\vec{e}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{f}$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$ ★☆☆

(1)　$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。
また，その大きさを求めよ。

①　$3\vec{a}$　　②　$\vec{a}+\vec{b}$　　③　$2\vec{a}-3\vec{b}$

(2)　O(0，0)，A(2，3)，B(−3，4)，C(5，−2) のとき，次のベクトルを成分で表せ。
また，その大きさを求めよ。

①　$\overrightarrow{OA}$　　②　$\overrightarrow{BC}$

$\boxed{7}$★★☆

$\vec{a}=(3,\ -4)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1)　$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$

(2)　$\vec{a}$ と反対の向きで，大きさが 10 のベクトル $\vec{b}$

$\boxed{8}$★★☆

$\vec{a}=(3,\ 5)$，$\vec{b}=(1,\ -1)$ のとき，$\vec{c}=(3,\ 7)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

$\boxed{9}$★★☆

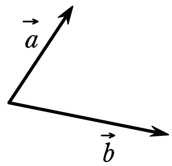
$\vec{p}=(5,\ 1)$，$\vec{q}=(-3,\ 2)$，$\vec{r}=(1,\ -1)$ とする。

(1)　$\vec{p}+t\vec{q}$ と $\vec{r}$ が平行になるように，実数 t の値を定めよ。

(2)　$|\vec{p}+t\vec{q}|$ の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{1}$

右の図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のベクトルを図示せよ。



(1)　$3\vec{a}$　　(2)　$\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　(3)　$-2\vec{b}$

(4)　$\vec{a}+2\vec{b}$　　(5)　$-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

$\boxed{2}$

次の等式が成り立つことを示せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{DB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$\boxed{3}$

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=6\vec{a}-3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\vec{a}+\vec{b}$ であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。ただし，$\vec{a}\fallingdotseq\vec{0}$，$\vec{b}\fallingdotseq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{u}-3\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\vec{u}-5\vec{v}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-2\vec{v}$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。

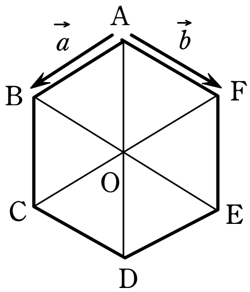
$\boxed{4}$

△ABC で，辺 BC，CA，AB の中点を，それぞれ L，M，N とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AL}}$　　(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CN}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$

$\boxed{5}$

正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\vec{v}$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を $\vec{u}$，$\vec{v}$ で表せ。



$\boxed{6}$

(1)　$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。
また，その大きさを求めよ。

①　$3\vec{a}$　②　$-\vec{b}$　③　$3\vec{a}+4\vec{b}$　④　$5\vec{b}-4\vec{a}$

(2)　4 点 O $(0,\ 0)$，A $(2,\ 0)$，B $(12,\ 5)$，C $(4,\ 4)$ について，次のベクトルを成分で表せ。
また，その大きさを求めよ。

①　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　②　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　③　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　④　$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

$\boxed{7}$

(1)　$\vec{a}=(1,\ 2)$ と同じ向きの単位ベクトルを成分で表せ。

(2)　$\vec{b}=(2,\ -\sqrt{5})$ と反対向きで，大きさが 6 のベクトルを成分で表せ。

$\boxed{8}$

$\vec{a}=(-2,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$ のとき，次のベクトルを $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形に表せ。

(1)　$\vec{p}=(1,\ -4)$　(2)　$\vec{q}=(0,\ -1)$

$\boxed{9}$

(1)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ に対して，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{b}-\vec{a}$ が平行になるように，実数 x の値を定めよ。

(2)　$\vec{a}=(3,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) について考える。

①　$|\vec{c}|=\sqrt{15}$ のとき，t の値を求めよ。

②　$|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

正六角形ABCDEFにおいて，中心をO，辺CDを2：1に内分する点をP，辺EFの中点をQとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

$\boxed{2}$

平行四辺形ABCDにおいて，対角線の交点をE，辺BCを2：1に内分する点をF，2つの線分AF，BDの交点をGとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$とする。

(1)　$\vec{b}$，$\vec{d}$をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{e}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{f}$を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$を$\vec{e}$，$\vec{f}$を用いて表せ。

$\boxed{3}$［明治大］

$a<0$に対して，点A$(a,\ a)$，B$(0,\ a)$をとる。点C$(1,\ 0)$，D$(-2,\ -1)$に対して，2つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$が平行となるときの$a$の値を求めよ。

$\boxed{4}$

4点A$(-3,\ -1)$，B$(a,\ 2)$，C$(3,\ 4)$，D$(-2,\ b)$を頂点とする四角形ABCDが平行四辺形であるとする。

(1)　a，bの値を求めよ。また，平行四辺形ABCDの隣り合う2辺の長さを求めよ。

(2)　平行四辺形ACEDの頂点Eの座標と対角線AEの長さを求めよ。

$\boxed{5}$［湘南工科大］

(1)　$\vec{a}=(-3,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$のとき，$\vec{a}+\vec{b}$と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2)　ベクトル$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ 1)$に対し，ベクトル$t\vec{a}+\vec{b}$の大きさが1となるtの値を求めよ。

(3)　$\vec{a}=(-5,\ 4)$，$\vec{b}=(7,\ -5)$，$\vec{c}=(1,\ t)$に対して$|\vec{a}-\vec{c}|=2|\vec{b}-\vec{c}|$が成り立つとき，$t$の値を求めよ。

第１講　レベルＢ

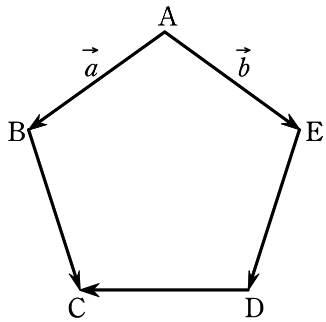
$\boxed{1}$

△ABC において，$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}$，$2\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ であるとき，四角形 ABPQ はどのような形か。

$\boxed{2}$ [津田塾大]

(1)　△ABC において，辺 BC 上に点 D を，辺 AC 上に点 E をとり，BD：DC＝1：2，AE：EC＝1：2 とする。BE と AD の交点を P とするとき，$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ。

(2)　正五角形 ABCDE において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{b}$ とおくとき，3 つのベクトル $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{ED}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。ただし，必要ならば $\cos 36^\circ=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ を用いてもよい。



４　**ベクトルの内積**

[1]　ベクトルの内積

$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

[注]　$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

[2]　内積と成分　$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とする。

１　$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

以下，$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$，$\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$ とする。

２　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$

３　**垂直条件**　$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

４　**平行条件**　$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$　　$\leftarrow \theta = 0^\circ$，$180^\circ$

$$\iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

[3]　内積の性質

１　$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$　　　２　$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

３　$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$　　　４　$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

５　$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$　　ただし，k は実数

[参考]　１より　$\vec{a} \cdot \vec{a} \geqq 0$，$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

[4]　三角形の面積

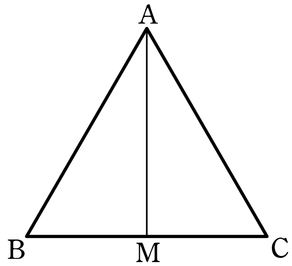
$\triangle$OAB の面積 S は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とすると

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

第２講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

1辺の長さが2である正三角形ABCの辺BCの中点をMとするとき，次の内積を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$　　(2)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(4)　$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\boxed{2}$ ★☆☆

2つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ -\sqrt{3})$ に対して，その内積と，なす角 θ を求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

ベクトル $\vec{a}=(1,\ -\sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$\boxed{4}$ ★★☆

次の等式を証明せよ。

(1)　$(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=|\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2)　$12|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=|3\vec{a}+\vec{b}|^2+3|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$\boxed{5}$ ★★☆

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

(2)　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすとき，$|2\vec{a}-3\vec{b}|$ の値を求めよ。

$\boxed{6}$ ★★☆

△ABCは点Oを中心とする半径1の円に内接し，$5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たす。このとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値は ア$\boxed{\quad}$ であり，辺ABの長さは イ$\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{7}$ ★★☆

3点A(2，8)，B(0，−2)，C(6，4)を頂点とする△ABCの面積を求めよ。

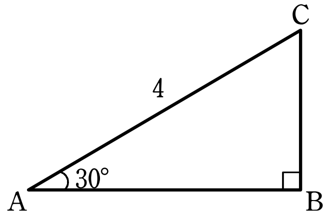
第２講　例題演習

$\boxed{1}$

右の図の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　　(4)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$



$\boxed{2}$

次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の内積と，そのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$　　(2)　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(1,\ -3)$

$\boxed{3}$

$\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

$\boxed{4}$

次の等式を証明せよ。

(1)　$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+2\vec{b})=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{p}-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2)　$|\vec{a}-6\vec{b}|^2+|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=5(|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2)$

$\boxed{5}$

(1)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $120°$ であるとき，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{a}-2\vec{b}|=2$，$|\vec{b}|=1$ のとき，$|2\vec{a}+3\vec{b}|$ を求めよ。

$\boxed{6}$

平面上に 4 点 O，A，B，C がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OC}=\sqrt{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ。　　(2)　△OAB の面積を求めよ。

$\boxed{7}$

次の 3 点を頂点とする △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　A(0，0)，B(3，1)，C(2，4)　　(2)　A(−2，1)，B(3，0)，C(2，4)

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$［愛知工業大］

座標平面において，ベクトル $\vec{a}=(1,\,-1)$ と $60°$ の角をなす単位ベクトルを求めよ。

$\boxed{2}$

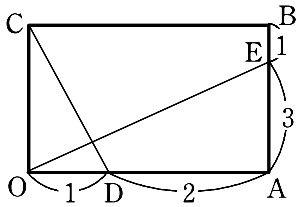
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=2$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が垂直になるように，実数 t の値を定めよ。

$\boxed{3}$

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。ただし，t は実数とする。

$\boxed{4}$

$\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OC}=2$ である長方形 OABC がある。辺 OA を $1:2$ に内分する点を D，辺 AB を $3:1$ に内分する点を E とするとき，$\mathrm{CD}\perp\mathrm{OE}$ であることを証明せよ。



$\boxed{5}$

(1)　不等式 $|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　不等式 $|3\vec{a}+4\vec{b}|\leqq3|\vec{a}|+4|\vec{b}|$ を証明せよ。

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$ [龍谷大]

ベクトル $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ は，$|\vec{p}|=4$，$|\vec{q}|=2$ を満たし，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角は 60° である。

(1)　2 つのベクトルの大きさ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　すべての実数 t に対し $|t\vec{a}+k\vec{b}|\geqq|\vec{b}|$ が成り立つような実数 k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ [福岡大]

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は直交し，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ を満たす。また，$\vec{c}=2\vec{a}$，$\vec{d}=k\vec{b}$ とし，k は実数とする。

(1)　$\vec{c}+\vec{d}$ の大きさを k を用いて表せ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{c}+\vec{d}$ のなす角が 60° であるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{3}$ [群馬大]

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について，$\vec{a}+2\vec{b}$ と $\vec{a}-2\vec{b}$ が垂直で，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2|\vec{b}|$ とする。

(1)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$|\vec{a}|=1$ のとき，$\left|t\vec{a}+\dfrac{1}{t}\vec{b}\right|$ $(t>0)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ [関西大]

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}+3t\vec{b}$ が垂直であるような実数 t がただ 1 つ存在するとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

５　位置ベクトル

$\boxed{1}$　**位置ベクトル**

平面上で，点 O を定めておくと，どんな点 P の位置も，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ によって決まる。

$\vec{p}$　　点 O に関する点 P の位置ベクトル

$\mathrm{P}(\vec{p})$　点 O に関する位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P

２点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

$\boxed{2}$　**内分点，外分点，三角形の重心**

１　２点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

内分 … $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$，　外分 … $\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

注意　内分点も外分点もその位置ベクトルは，適当な実数 s を用いて $(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ の形に表される。

２　３点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

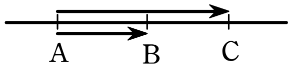
６　ベクトルの図形への応用

1　一直線上にある点

２点 A，B が異なるとき

点 C が直線 AB 上にある

$\iff$ $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある



2　ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s'$，$t=t'$　（s，t，s'，t' は実数）

とくに　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=t=0$

3　内積の利用

１　なす角 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|\cos\theta$ から。

２　$AB\perp CD \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$　$(\overrightarrow{AB}\neq 0,\ \overrightarrow{CD}\neq 0)$

３　$AB^2=|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

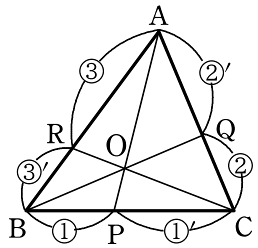
4　チェバ，メネラウスの定理の利用

１　チェバの定理

△ABC の頂点 A，B，C と１点 O を結ぶ各直線が，対辺またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とすると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。



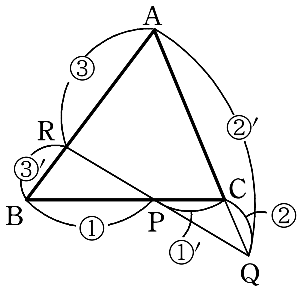
$$\frac{①}{①'}\cdot\frac{②}{②'}\cdot\frac{③}{③'}=1$$

２　メネラウスの定理

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

が成り立つ。



$\boxed{1}$★☆☆

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　1：3 に内分する点　　(2)　1：3 に外分する点

$\boxed{2}$★★☆

△ABC と点 P に対して，等式 $5\overrightarrow{AP}+4\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1)　点 P の位置をいえ。　　(2)　△PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

$\boxed{3}$★★☆

平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 2：3 に内分する点を L，辺 AB を 2：3 に内分する点を M，線分 MC を 4：15 に内分する点を N とするとき，3 点 D，L，N は一直線上にあることを証明し，DL：LN を求めよ。

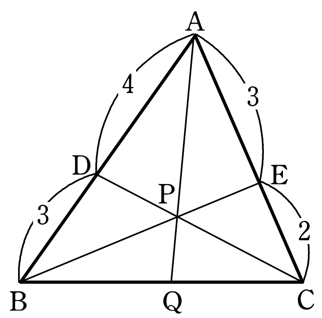
$\boxed{4}$★★☆

△ABC において，辺 AB を 4：3 に内分する点を D，辺 AC を 3：2 に内分する点を E とし，2 つの線分 CD，BE の交点を P とする。また，線分 AP の延長と辺 BC の交点を Q とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき

(1)　$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。



$\boxed{5}$★★☆

平面上に三角形 OAB があり，OA＝5，OB＝6，AB＝7 とする。また，△OAB の垂心を H とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$★★☆

△ABC において，AB＝3，AC＝2，∠A＝60°，外心を O とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{1}$

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB について，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　2：5 に内分する点　　(2)　中点

(3)　3：4 に外分する点　　(4)　3：1 に外分する点

$\boxed{2}$

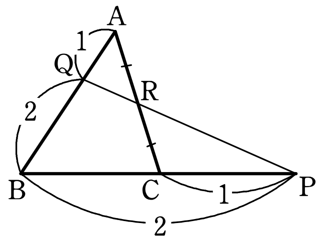
△ABC と点 P に対して，等式 $6\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っている。

(1)　点 P の位置をいえ。

(2)　面積比 △PBC：△PCA：△PAB を求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　△ABC において，辺 BC を 2：1 に外分する点を P，辺 AB を 1：2 に内分する点を Q，辺 CA の中点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明し，QR：QP を求めよ。



(2)　平行四辺形 ABCD において，対角線 BD を 9：10 に内分する点を P，辺 AB を 3：2 に内分する点を Q，線分 QD を 1：2 に内分する点を R とするとき，3 点 C，P，R は一直線上にあることを証明せよ。

$\boxed{4}$

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 3：4 に内分する点を D，線分 AD と BC との交点を P とし，直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\boxed{5}$

三角形 OAB において， OA＝8，OB＝10，AB＝12 とする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ。また，三角形 OAB の垂心を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

$\boxed{6}$

△ABC において，AB＝2, AC＝3, ∠A＝60°, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。このとき，△ABC の外心を O として，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{1}$

(1)　△ABCの辺BC，CA，ABを1：3に内分する点をそれぞれD，E，Fとする。
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

(2)　△ABCの辺AB，ACをそれぞれ2：1，2：3に内分する点をD，Eとする。
線分BE，CDをそれぞれ5：6，9：2に内分する点は同じ点であることを証明せよ。

$\boxed{2}$［小樽商科大］

△OABにおいて，OA＝2，OB＝3，AB＝4である．点Oから辺ABに下ろした垂線をOHとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

$\boxed{3}$［福岡大］

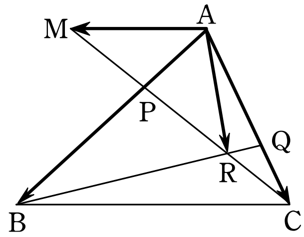
平行四辺形OABCについて，ABの中点をEとし，BCを2：1に内分する点をFとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{EF}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと $\overrightarrow{EF}=$ ア $\boxed{}$ である。

また，線分EFと線分OBとの交点をGとするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{OG}=$ イ $\boxed{}$ である。

$\boxed{4}$［東京理科大］

図のように△ABCの辺ABを1：2に内分する点をP，辺ACを2：1に内分する点をQとし，BQとCPの交点をRとする。また，RPを1：r $(0<r<1)$ に外分する点をMとするとき，$\overrightarrow{AM}$ と $\overrightarrow{BC}$ が平行になるように，r の値を定めよ。



第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$［愛知教育大］

同一直線上にない３点 O，A，B がある。線分 OB を $3:2$ に内分する点を C，線分 AB を $s:(1-s)$ $(0<s<1)$ に内分する点を D とし，線分 OD と線分 AC の交点を E とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と s を用いて表せ。

(2)　△OAE と △OCE の面積が等しくなるような s の値を求めよ。

$\boxed{2}$［京都大］

△ABC の内心を P とする。$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立っているとき，この三角形は正三角形であることを示せ。

$\boxed{3}$［新潟大］

△ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$，$4\overrightarrow{AG}+3\overrightarrow{BG}+5\overrightarrow{CG}=12\overrightarrow{OG}$ を満たすとする。

(1)　$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3)　OG の長さを求めよ。

$\boxed{4}$［九州大］

△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。３つの三角形 △OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする。

(1)　$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および a，b を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ および a，b，c を用いて表せ。

(3)　３辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ３，５，６であるとする。点 P を中心とし，３直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

第４講　追加演習問題

$\boxed{1}$

$AB=3$，$BC=2$，$CA=4$ である $\triangle ABC$ の内心を I とし，直線 AI と辺 BC の交点を D とする。また，$\triangle ABC$ の内接円と辺 BC との接点を E とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき

(1)　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3)　$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(4)　$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

$\boxed{2}$ [静岡大]

三角形 OAB において，頂点 A，B におけるそれぞれの外角の二等分線の交点を C とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P が $\angle AOB$ の二等分線上にあるとき，$\overrightarrow{OP}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数 t が存在することを示せ。

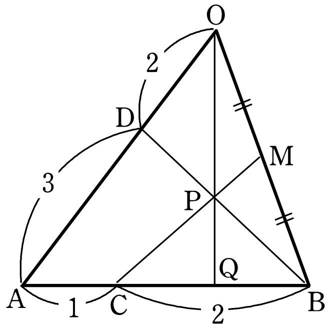
(2)　$|\vec{a}|=7$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\boxed{3}$

$\triangle OAB$ において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $1:2$ に内分する点を C，辺 OA を $2:3$ に内分する点を D，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。
また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OP と辺 AB の交点を Q とするとき，AQ：QB を求めよ。



$\boxed{4}$ [新潟大]

平行四辺形 ABCD において，対角線 BD を $3:4$ に内分する点を E とし，点 F は辺 CD の延長上にあって $CD=3DF$ を満たし，直線 AE と直線 CD の交点を G とする．
$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおくとき

(1)　$\overrightarrow{AE}$ と $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$ と $\vec{d}$ を用いて表せ．

(3)　直線 AG と直線 BF が垂直のとき，AB：AD を求めよ．

$\boxed{5}$

△ABC において，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

$\boxed{6}$ [大阪市立大]

△OAB の 2 つの辺 OA，OB を，それぞれ $s:(1-s)$，$t:(1-t)$ の比に内分する点を C，D とする $(0<s<1,\ 0<t<1)$．△OCD，△OAB の重心をそれぞれ G，H とし，△CGH，△DGH の重心をそれぞれ I，J とする．

(1) $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{IJ}$ を示せ．

(2) 4 点 C，D，I，J が同一直線上にあるとき，s と t が満たす関係式を求めよ．