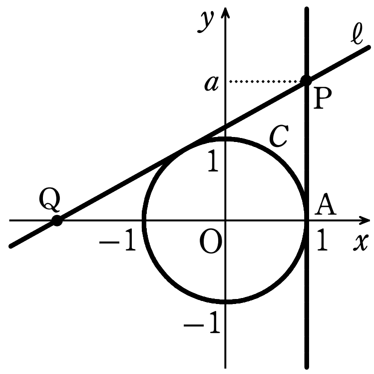
1

(解説)

(1)　ℓ は x 軸に垂直でないから，その方程式は

$$y=m(x-1)+a$$

とおける。



これを変形すると　$mx-y+a-m=0$

ℓ と C が接するから

$$\frac{|m\cdot 0-0+a-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

よって　　$|a-m|=\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　　$(a-m)^2=m^2+1$

整理すると　$2am=a^2-1$

ゆえに　$m=\dfrac{a^2-1}{2a}$

よって，ℓ の方程式は　$y=\dfrac{a^2-1}{2a}(x-1)+a$

$y=0$ とすると　　$\dfrac{a^2-1}{2a}(x-1)+a=0$

これを解いて　　$x=\dfrac{1+a^2}{1-a^2}$

これが点 Q の x 座標であるから　$L=1-\dfrac{1+a^2}{1-a^2}=\dfrac{2a^2}{a^2-1}$　$(a>1)$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\cdot L\cdot \mathrm{PA}=\dfrac{a^3}{a^2-1}$

$$S'=\frac{3a^2(a^2-1)-a^3\cdot 2a}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})}{(a^2-1)^2}$$

$a>1$ における S の増減表は，次のようになる。

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘	極小	↗

よって，S は $a=\sqrt{3}$ のとき極小かつ最小になる。

したがって，最小値は　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{2}$

解説

(1) $e^{2a}-2e^{a}-1=0$ から　　$(e^{a})^{2}-2e^{a}-1=0$

$e^{a}>0$ であるから　　$e^{a}=1+\sqrt{2}$

よって　　$a=\log(1+\sqrt{2})$

(2) $F(t)=\int_{0}^{t}\dfrac{e^{x}}{e^{x}+e^{2t}}dx=\int_{0}^{t}\dfrac{(e^{x}+e^{2t})'}{e^{x}+e^{2t}}dx=\Big[\log(e^{x}+e^{2t})\Big]_{0}^{t}$

$$=\log(e^{t}+e^{2t})-\log(1+e^{2t})=\log\frac{e^{t}+e^{2t}}{1+e^{2t}}$$

(3) (2) から　$F(t)=\log\dfrac{e^{t}(1+e^{t})}{1+e^{2t}}$　……①

$$=\log e^{t}+\log(1+e^{t})-\log(1+e^{2t})=t+\log(1+e^{t})-\log(1+e^{2t})$$

よって　　$F'(t)=1+\dfrac{e^{t}}{1+e^{t}}-\dfrac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}=-\dfrac{e^{2t}-2e^{t}-1}{(1+e^{t})(1+e^{2t})}$

$F'(t)=0$ とすると　　$e^{2t}-2e^{t}-1=0$

(1) から　　$t=\log(1+\sqrt{2})$

$t\geqq 0$ における $F(t)$ の増減表は，次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\log(1+\sqrt{2})$	$\cdots$
$F'(t)$		$+$	0	$-$
$F(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$F(t)$ は $t=\log(1+\sqrt{2})$ のとき最大になる。

$t=\log(1+\sqrt{2})$ のとき　$e^{t}=1+\sqrt{2}$，$e^{2t}=3+2\sqrt{2}$　であるから，

① より $F(t)$ の最大値は

$$F(\log(1+\sqrt{2}))=\log\frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}=\log\frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\log\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

3

解説

500 円玉のうち，特定の 1 枚を A とする。

A を除いたとき，100 円玉，500 円玉はいずれも n 枚となる。500 円玉の表の枚数を X，100 円玉の表の枚数を Y とする。A が表の場合と裏の場合を考慮して，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times P(X\geqq Y)+\frac{1}{2}\times P(X>Y)&=\frac{1}{2}\{1-P(X<Y)\}+\frac{1}{2}P(X>Y)\\&=\frac{1}{2}\qquad (P(X<Y)=P(X>Y)\text{ から})\end{aligned}$$

4

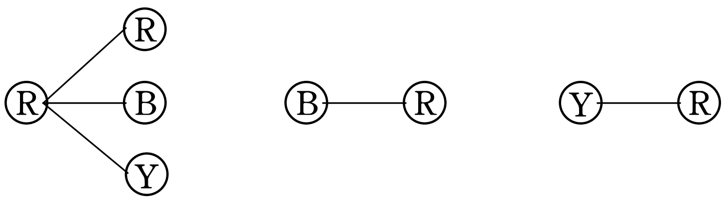
解説

求める塗り方の総数を a_n とする。

車両を赤色で塗ることをR，青色で塗ることをB，

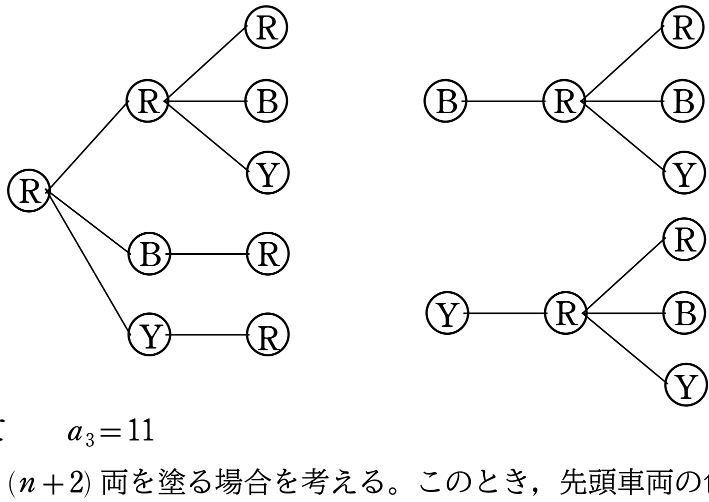
黄色で塗ることをYで表す。

$n=2$ のとき　塗り方は次の 5 通り



よって　　$a_2=5$

$n=3$ のとき　塗り方は次の 11 通り



よって　　$a_3=11$

次に，$(n+2)$ 両を塗る場合を考える。このとき，先頭車両の色の塗り方で次の [1]，[2] の場合に分かれる。

[1]　先頭車両を赤色で塗る場合

　残りの $(n+1)$ 両の色の塗り方は　　a_{n+1} 通り

[2]　先頭車両を青色または黄色で塗る場合

　2 両目は赤色を塗り，残りの n 両の塗り方は a_n 通りあるから，全部で　　$2a_n$ 通り

したがって　　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

これを変形すると　$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

よって　　$a_{n+1}+a_n=2^{n-2}(a_3+a_2)$

$a_{n+1}-2a_n=(-1)^{n-2}(a_3-2a_2)$

$a_2=5$，$a_3=11$ から　$a_{n+1}+a_n=2^{n+2}$，$a_{n+1}-2a_n=(-1)^n$

辺々引いて　　$3a_n=2^{n+2}-(-1)^n$

したがって　　$a_n=\dfrac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}$