1

(解説)

(1)　白球 4 個，赤球 3 個が入っている袋から球を3 個取り出す方法は　　${}_{7}\mathrm{C}_{3}=35$ (通り)

確率変数 W のとり得る値は 0，1，2，3 である。

$$P(W=0)=\frac{{}_{3}\mathrm{C}_{3}}{35}=\frac{{}^{ア}1}{{}^{イウ}35}$$

$$P(W=1)=\frac{{}_{4}\mathrm{C}_{1}\times{}_{3}\mathrm{C}_{2}}{35}=\frac{4\times3}{35}=\frac{{}^{エオ}12}{35}$$

$$P(W=2)=\frac{{}_{4}\mathrm{C}_{2}\times{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{35}=\frac{6\times3}{35}=\frac{{}^{カキ}18}{35}$$

$$P(W=3)=\frac{{}_{4}\mathrm{C}_{3}}{35}=\frac{{}^{ク}4}{35}$$

ゆえに，W の期待値 (平均) $E(W)$ は

W	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(W)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}$$

$$=\frac{60}{35}=\frac{{}^{ケコ}12}{{}^{サ}7}$$

また　　$E(W^2)=0^2\cdot\frac{1}{35}+1^2\cdot\frac{12}{35}+2^2\cdot\frac{18}{35}+3^2\cdot\frac{4}{35}$

$$=\frac{120}{35}=\frac{24}{7}$$

よって，W の分散 $V(W)$ は

$$V(W)=E(W^2)-\{E(W)\}^2=\frac{24}{7}-\left(\frac{12}{7}\right)^2=\frac{{}^{シス}24}{{}^{セソ}49}$$

(2)　確率変数 Z が標準正規分布に従うから，t を実数の定数とすると

$$P(-t\leqq Z\leqq t)=2P(0\leqq Z\leqq t)$$

が成り立つ。

$P(-t\leqq Z\leqq t)=0.99$ が成り立つとき　　$2P(0\leqq Z\leqq t)=0.99$

ゆえに　　$P(0\leqq Z\leqq t)=0.495$

正規分布表から 0.495 に最も近い値で選択肢にある値を探すと　　$t=2.58$　(^{タ} ③)

(3)　母標準偏差 σ の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間は

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　　$L_1=\overline{X}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

また，この標本から得られる母平均 m の信頼度 99 % の信頼区間は，(2) より

$$\overline{X}-2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{X}+2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　　$L_2=\overline{X}+2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\overline{X}-2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\cdot2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

これらから　　$\dfrac{L_2}{L_1}=\dfrac{2\cdot2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{2.58}{1.96}=1.31\cdots\cdots$

よって　　$\dfrac{L_2}{L_1}={}^{チ}1.{}^{ツ}3$

また，同じ母集団から抽出した大きさ $4n$ の無作為標本の標本平均を $\overline{Y}$ とする。
この標本から得られる母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間は

$$\overline{Y}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\leqq m\leqq\overline{Y}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

よって　　$L_3=\overline{Y}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}-\left(\overline{Y}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}\right)$

$$=2\cdot1.96\cdot\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ゆえに　　$\dfrac{L_3}{L_1}=\dfrac{1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{2}={}^{テ}0.{}^{ト}5$

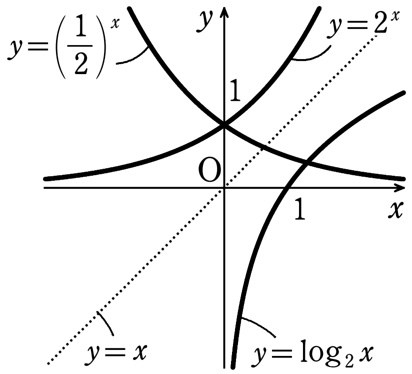
$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$8^{\frac{5}{6}}=(2^3)^{\frac{5}{6}}=2^{3\times\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{2}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}={}^{ア}4\sqrt{{}^{イ}2}$

$$\log_{27}\frac{1}{9}=\log_{27}9^{-1}=-\log_{27}9=-\frac{\log_3 9}{\log_3 27}=-\frac{\log_3 3^2}{\log_3 3^3}=\frac{{}^{ウエ}-2}{{}^{オ}3}$$

(2)
$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$$



よって，$y=2^x$ のグラフと $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは y 軸に関して対称である。　(^{カ} ②)

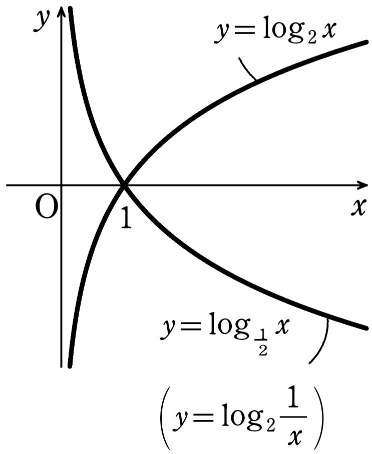
$y=2^x$ のグラフと $y=\log_2 x$ のグラフ は直線 $y=x$ に関して対称である。　(^{キ} ③)

$$y=\log_{\frac{1}{2}}x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2 x$$

よって，$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフは x 軸に関して対称である。　(^{ク} ①)

$$y=\log_2\frac{1}{x}=\log_2 x^{-1}=-\log_2 x$$

よって，$y=\log_2 x$ のグラフと $y=\log_2\frac{1}{x}$ のグラフは x 軸に関して対称である。　(^{ケ} ①)



(3)　$t=\log_2 x$ とおく。

$x>0$ であるから，t のとり得る値の範囲は実数全体である。　(^{シ} ③)

$$y=(\log_2 x-\log_2 4)^2-4\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+3=(\log_2 x-2)^2-2\log_2 x+3$$
$$=(t-2)^2-2t+3=t^2-{}^{コ}6t+{}^{サ}7=(t-3)^2-2$$

t は実数全体を動くから，y は $t=3$ のとき最小値 -2 をとる。

$t=3$ のとき　　$3=\log_2 x$　　　　よって　$x=8$

したがって，y は $t={}^{ス}3$ のとき，すなわち $x={}^{セ}8$ のとき，最小値 ${}^{ソタ}-2$ をとる。

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　① の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ を掛けると

$$\sin^2 x\cos^2 x\left\{\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right\}=0$$

$$\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)+k(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x\right)^2(\cos^2 x-\sin^2 x)-k(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cos 2x-k\cos 2x=0$$

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{{}^{\text{ア}}4}-k\right)\cos 2x=0 \quad \cdots\cdots ②$$

よって　$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$　または　$\cos 2x=0$

$0<2x<\pi$ であるから，$\cos 2x=0$ より　$2x=\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$　$\cdots\cdots$ ③

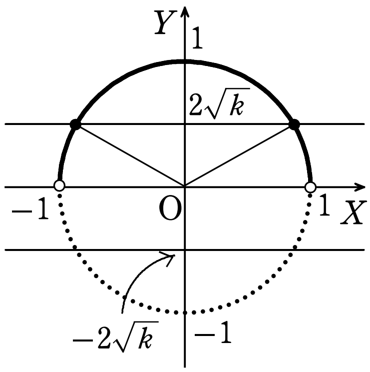
したがって，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{{}^{\text{イ}}4}$ のとき常に ① が成り立つ。

また，$0<2x<\pi$ であるから　$0<\sin^2 2x\leqq 1$

$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$ から　$\sin^2 2x=4k$

$k>0$ より　$\sin 2x=\pm 2\sqrt{k}$

$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$ を満たす x は，右の図から



$2\sqrt{k}>1$ すなわち $k>\dfrac{1}{4}$ のとき　ない

$2\sqrt{k}=1$ すなわち $k=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\sin 2x=1$

よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$2\sqrt{k}<1$ すなわち $0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{4}$ 以外の 2 個

③ と合わせると，① を満たす x の個数は

$k>\dfrac{{}^{\text{ウ}}1}{{}^{\text{エ}}4}$ のとき　1 個　　$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　${}^{\text{オ}}3$ 個　　$k=\dfrac{1}{4}$ のとき　${}^{\text{カ}}1$ 個

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とすると，② より　$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}\right)\cos 2x=0$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ であるから　　$\cos 2x \neq 0$

よって　　$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}=0$　　　　ゆえに　$\sin^2 2x=\dfrac{16}{25}$

$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ より，$\sin 2x>0$ であるから　　$\sin 2x=\dfrac{^{キ}4}{^{ク}5}$

$\cos^2 2x=1-\sin^2 2x$ より　　$\cos^2 2x=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ より，$\cos 2x<0$ であるから　　$\cos 2x=\dfrac{^{ケコ}-3}{^{サ}5}$

よって　　$2\cos^2 x-1=-\dfrac{3}{5}$　　　　ゆえに　$\cos^2 x=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos x>0$ であるから　　$\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{^{シ}5}}{^{ス}5}$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　BP：PM$=t:(1-t)$, CP：PL$=s:(1-s)$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\cdot\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表される．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\not\parallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから　$1-t=\dfrac{2}{3}s,\ \dfrac{t}{2}=1-s$

これを解くと　$t=\dfrac{1}{2},\ s=\dfrac{3}{4}$　　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　(1) から，k を実数として　$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{k}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおける．

N は辺 BC 上にあるから　$\dfrac{k}{2}+\dfrac{k}{4}=1$

よって，$k=\dfrac{4}{3}$ から　$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3)　$\mathrm{CN}=\mathrm{AC}\cos\theta=2a\cos\theta$, $\mathrm{BN}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CN}=\dfrac{1}{2}(2a\cos\theta)=a\cos\theta$

ゆえに　$\mathrm{BC}=\mathrm{BN}+\mathrm{CN}=3a\cos\theta$

また　$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{BN}^2+\mathrm{AN}^2}=\sqrt{(a\cos\theta)^2+(2a\sin\theta)^2}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=a\sqrt{1+3\sin^2\theta}$