1

連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 25 \\ (y-2x-10)(y+x+5) \leqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ がこの領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値 M と最小値 m を求めよ。また，M，m を与える D の点を求めよ。

(3)　a を実数とする。点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$ax+y$ が点 $(-3,\ 4)$ で最大値をとるような a の範囲を求めよ。

2

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$　$(x>0)$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然対数の底 e について，$e=2.718\cdots\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを証明なしで用いてよい。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　区間 $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$，および直線 $x=e$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

3

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，$\mathrm{P}(x,\ x)$ をとり，$\triangle\mathrm{APB}$ を考える。x の値が変化するとき，$\angle\mathrm{APB}$ の最大値を求めよ。

4

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。