

1

(1) $xy+2x-3y-10=0$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$ を満たす自然数 x, y の値の組をすべて求めよ。

2

n は自然数とする。 $\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

3

次のような条件を満たす2つの自然数 a, b の組をすべて求めよ。ただし、 $a < b$ とする。

(1) 和が160, 最大公約数が8 (2) 積が300, 最小公倍数が60

4

(1) $2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$ を因数分解せよ。

(2) $2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$ を満たす整数 x, y の値を求めよ。

5

n は自然数とする。合同式を用いて、次のことを証明せよ。

(1) n^5+n^2+2 は3の倍数でない。

(2) $5^{n+1}+6^{2n-1}$ は31の倍数である。

6

x, y を整数とする不定方程式 $17x+43y=341$ …①を考える。法17の合同式を考えることにより、方程式①より、 $y \equiv A \pmod{17}$ とできる。この A の値を求めよ。ただし、 A の値は正の整数で最小のものとする。

7

合同式を用いて、方程式 $93x-29y=424$ の整数解をすべて求めよ。

8

$\sqrt{\frac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

9

20の倍数で、正の約数の個数が15個である自然数 n をすべて求めよ。

10

a, b が互いに素な自然数のとき、 $\frac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数であることを示せ。

11

n は整数とする。 n^3+5n は6の倍数であることを証明せよ。

12

a, b, c は整数とし、 $a^2+b^2=c^2$ とする。 a, b のうち、少なくとも1つは3の倍数であることを証明せよ。

13

(1) $20!$ を計算した結果は、2で何回割り切れるか。

(2) $25!$ を計算すると、末尾には0が連続して何個並ぶか。

1

【解答】 (1) $(x, y) = (-1, -3), (1, -4), (2, -6), (4, 2), (5, 0), (7, -1)$
 (2) $(x, y) = (2, 4), (3, 12)$

2

【解答】 $n = 5, 13$

3

【解答】 (1) $(a, b) = (8, 152), (24, 136), (56, 104), (72, 88)$
 (2) $(a, b) = (5, 60), (15, 20)$

4

【解答】 (1) $(x + 2y - 2)(2x - y + 1)$ (2) $(x, y) = (-1, 0), (1, 2)$

5

【解答】 (1) 略 (2) 略

6

【解答】 $A = 2$

7

【解答】 $x = 29k + 3, y = 93k - 5$ (k は整数とする。)

8

【解答】 $n = 21, 84, 189, 756$

9

【解答】 $n = 400, 2500$

10

【解答】 略

11

【解答】 略

12

【解答】 略

13

【解答】 (1) 18回 (2) 6個

1

(1) $xy + 2x - 3y = x(y + 2) - 3(y + 2) + 6 = (x - 3)(y + 2) + 6$

与式に代入すると $(x - 3)(y + 2) + 6 - 10 = 0$

よって $(x - 3)(y + 2) = 4$ …… ①

x, y は整数であるから, $x - 3, y + 2$ も整数で, ① より

$(x - 3, y + 2) = (-4, -1), (-2, -2), (-1, -4),$
 $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$

ゆえに $(x, y) = (-1, -3), (1, -4), (2, -6), (4, 2), (5, 0), (7, -1)$

(2) 両辺に $4xy$ を掛けて $4y - 4x = xy$ よって $xy + 4x - 4y = 0$

ゆえに $(x - 4)(y + 4) + 16 = 0$ よって $(x - 4)(y + 4) = -16$ …… ②

x, y は自然数であるから, $x - 4, y + 4$ は整数である。

また, $x \geq 1, y \geq 1$ であるから $x - 4 \geq -3, y + 4 \geq 5$

よって, ② から $(x - 4, y + 4) = (-2, 8), (-1, 16)$

ゆえに $(x, y) = (2, 4), (3, 12)$

2

$\sqrt{n^2 + 56}$ が自然数となるとき, k を自然数として, 次の式が成り立つ。

$$\sqrt{n^2 + 56} = k$$

両辺を2乗して移項すると $k^2 - n^2 = 56$

すなわち $(k + n)(k - n) = 56$ …… ①

ここで, k, n は $k > n$ を満たす自然数であるから, $k + n, k - n$ はともに自然数である。

$k + n > k - n$ であるから, ① を満たす自然数 $k + n, k - n$ の組は次のようになる。

$(k + n, k - n) = (56, 1), (28, 2), (14, 4), (8, 7)$

$(k + n) + (k - n) = 2k$ は偶数であるから

$(k + n, k - n) = (28, 2), (14, 4)$

これを満たす自然数 k, n の組は次のようになる。

$(k, n) = (15, 13), (9, 5)$

したがって、求める自然数 n は $n=5, 13$

3

(1) 最大公約数が8であるから、 a, b は

$$a=8a', b=8b'$$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

$a+b=160$ であるから

$$8a'+8b'=160 \quad \text{すなわち} \quad a'+b'=20$$

$a'+b'=20$, $a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b')=(1, 19), (3, 17), (7, 13), (9, 11)$$

よって $(a, b)=(8, 152), (24, 136), (56, 104), (72, 88)$

(2) 最大公約数を g とすると、 a, b は

$$a=ga', b=gb'$$

と表される。ただし、 a', b' は互いに素である自然数で、 $a' < b'$ である。

a, b の積と最大公約数、最小公倍数の積は等しいから

$$300=g \cdot 60 \quad \text{よって} \quad g=5$$

最小公倍数が60であるから

$$ga'b'=60 \quad \text{すなわち} \quad 5a'b'=60$$

よって $a'b'=12$

$a'b'=12$, $a' < b'$ を満たし、互いに素である自然数 a', b' の組は

$$(a', b')=(1, 12), (3, 4)$$

したがって $(a, b)=(5, 60), (15, 20)$

4

(1) $2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$

$$=2x^2+(3y-3)x-(2y^2-4y+2)$$

$$=2x^2+3(y-1)x-2(y-1)^2$$

$$=\{x+2(y-1)\}\{2x-(y-1)\}$$

$$=(x+2y-2)(2x-y+1)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 2(y-1) \longrightarrow 4(y-1) \\ 2 & & -(y-1) \longrightarrow -(y-1) \\ \hline 2 & & -2(y-1)^2 \quad 3(y-1) \end{array}$$

(2) $2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=(2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2)-3$ であるから、

(1) の結果より $(x+2y-2)(2x-y+1)-3=0$

したがって $(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x, y は整数であるから、 $x+2y-2, 2x-y+1$ も整数である。

$$\text{よって} \quad \begin{cases} x+2y-2=-3 \\ 2x-y+1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=-1 \\ 2x-y+1=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=1 \\ 2x-y+1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-2=3 \\ 2x-y+1=1 \end{cases}$$

これらの連立方程式の解は、順に $(x, y)=(-1, 0), \left(-\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 2)$

x, y がともに整数であるものは $(x, y)=(-1, 0), (1, 2)$

5

(1) [1] $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき

$$n^5+n^2+2 \equiv 2 \pmod{3}$$

[2] $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき

$$n^5+n^2+2 \equiv 1^5+1^2+2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

[3] $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき

$$n^5+n^2+2 \equiv 2^5+2^2+2 \equiv 38 \equiv 2 \pmod{3}$$

よって、 n^5+n^2+2 は3の倍数でない。

(2) $5^{n+1}+6^{2n-1} \equiv 5^2 \cdot 5^{n-1}+6 \cdot 6^{2(n-1)} \equiv 25 \cdot 5^{n-1}+6 \cdot 36^{n-1}$

$$\equiv (-6) \cdot 5^{n-1}+6 \cdot 5^{n-1} \equiv 0 \pmod{31}$$

よって、 $5^{n+1}+6^{2n-1}$ は31の倍数である。

6

$17x \equiv 0 \pmod{17}$ であるから $43y \equiv 341 \pmod{17}$

$43 \equiv 9, 341 \equiv 1 \pmod{17}$ であるから $9y \equiv 1 \pmod{17}$

$9y \equiv 1 \pmod{17}$ の両辺に2を掛けて $18y \equiv 2 \pmod{17}$

$18y \equiv 1 \cdot y \equiv y \pmod{17}$ であるから $y \equiv 2 \pmod{17}$

7

$29y \equiv 0 \pmod{29}$ であるから $93x \equiv 424 \pmod{29}$

$93 \equiv 6, 424 \equiv 18 \pmod{29}$ であるから $6x \equiv 18 \pmod{29}$

$6x \equiv 18 \pmod{29}$ の両辺に5を掛けて $30x \equiv 90 \pmod{29}$

$30x \equiv 1 \cdot x \equiv x \pmod{29}, 90 \equiv 3 \pmod{29}$ であるから $x \equiv 3 \pmod{29}$

よって、 k を整数として、 $x=29k+3$ と表される。

これを方程式に代入すると $93(29k+3)-29y=424$

y について解くと $y=93k-5$

よって、求める整数解は $x=29k+3, y=93k-5$ (k は整数)

【参考】 6と29は互いに素であるから、 $6x \equiv 18 \pmod{29}$ の両辺を6で割ると
 $x \equiv 3 \pmod{29}$

8

$\sqrt{\frac{756}{n}}$ が自然数になるのは、 $\frac{756}{n}$ がある自然数の2乗になるときである。

756を素因数分解すると $756=2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$ を $3 \cdot 7=21$ で割ると $2^2 \cdot 3^2$ すなわち $(2 \cdot 3)^2$

$3^3 \cdot 7=189$ で割ると 2^2

$2^2 \cdot 3 \cdot 7=84$ で割ると 3^2

756で割ると 1^2

よって、求める自然数 n は $n=21, 84, 189, 756$

9

15を素因数分解すると $15=3 \cdot 5$

よって、正の約数の個数が15個である自然数 n を素因数分解すると、

$$p^{14}, p^2 q^4 \quad (p, q \text{ は異なる素数})$$

のどちらかの形で表される。

n は20の倍数であり、 $20=2^2 \cdot 5$ であるから、 n は $p^2 q^4$ の形で表される。

したがって、求める自然数 n は

$$n=2^2 \cdot 5^4, 5^2 \cdot 2^4 \quad \text{すなわち} \quad n=400, 2500$$

10

$$3a+7b=(2a+5b) \cdot 1+a+2b$$

$$2a+5b=(a+2b) \cdot 2+b$$

$$a+2b=b \cdot 2+a$$

よって、 $3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は a と b の最大公約数に等しい。

a と b は互いに素であるから、最大公約数は1である。

ゆえに、 $3a+7b$ と $2a+5b$ の最大公約数は1であるから、分母と分子は互いに素である。

したがって、分数 $\frac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

【別解】 $3a+7b=m, 2a+5b=n$ (m, n は自然数) とおくと

$$a=5m-7n, b=3n-2m$$

m と n の最大公約数を d とすると、 $5m-7n, 3n-2m$ は d で割り切れるから、 a と b は公約数 d をもつことになる。

ところが a と b は互いに素であるから $d=1$

よって、 m と n は互いに素であるから、 $\frac{m}{n}$ すなわち $\frac{3a+7b}{2a+5b}$ は既約分数である。

11

$$\begin{aligned} n^3+5n &= (n^3-n)+6n = n(n^2-1)+6n \\ &= (n-1)n(n+1)+6n \end{aligned}$$

$(n-1)n(n+1)$ は連続する3つの整数の積であるから、6の倍数である。

また、 $6n$ も6の倍数である。

よって、 n^3+5n は6の倍数である。

12

a, b はともに3の倍数でないと仮定する。

このとき、 a^2, b^2 は $(3k+1)^2=3(3k^2+2k)+1, (3k+2)^2=3(3k^2+4k+1)+1$

のどちらかの式の k に適当な整数を代入すると、それぞれ表される。

$3k^2+2k, 3k^2+4k+1$ は整数であるから、3の倍数でない数 a, b の2乗を3で割った余りはともに1である。

したがって、 a^2+b^2 を3で割った余りは2である。……①

一方、 c が3の倍数のとき、 c^2 は3で割り切れ、

c が3の倍数でないとき、 c^2 を3で割った余りは1である。

すなわち、 c^2 を3で割った余りは0か1である。……②

①、②は $a^2+b^2=c^2$ であることに矛盾する。

ゆえに、 $a^2+b^2=c^2$ ならば、 a, b のうち、少なくとも1つは3の倍数である。

13

(1) $20!$ が2で割り切れる回数は、 $20!$ を素因数分解したときの素因数2の個数に一致す

る。1 から 20 までの自然数のうち、

2 の倍数の個数は、20 を 2 で割った商で 10

2^2 の倍数の個数は、20 を 2^2 で割った商で 5

2^3 の倍数の個数は、20 を 2^3 で割った商で 2

2^4 の倍数の個数は、20 を 2^4 で割った商で 1

$20 < 2^5$ であるから、 2^n ($n \geq 5$) の倍数はない。

よって、素因数 2 の個数は、全部で $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ (個)

したがって、 $20!$ は 2 で 18 回割り切れる。

(2) $25!$ を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は、 $25!$ を素因数分解したときの素因数 5

の個数に一致する。1 から 25 までの自然数のうち、

5 の倍数の個数は、25 を 5 で割った商で 5

5^2 の倍数の個数は、25 を 5^2 で割った商で 1

$25 < 5^3$ であるから、 5^n ($n \geq 3$) の倍数はない。

よって、素因数 5 の個数は、全部で $5 + 1 = 6$ (個)

したがって、0 は 6 個連続して現れる。