

1

関数  $f(\theta) = 3\sin^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$  を考える。

(1)  $f(0) = \boxed{\text{アイ}}$ ,  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$  である。

(2) 2倍角の公式を用いて計算すると,  $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + \boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$  となる。

さらに,  $\sin 2\theta$ ,  $\cos 2\theta$  を用いて  $f(\theta)$  を表すと

$$f(\theta) = \boxed{\text{キ}} \sin 2\theta - \boxed{\text{ク}} \cos 2\theta + \boxed{\text{ケ}} \dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

(3)  $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲を動くとき, 関数  $f(\theta)$  のとり得る最大の整数の値  $m$  とそのときの  $\theta$  の値を求めよう。

三角関数の合成を用いると, ①は

$$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}\right) + \boxed{\text{ケ}}$$

と変形できる。したがって,  $m = \boxed{\text{ス}}$  である。

また,  $0 \leq \theta \leq \pi$  において,  $f(\theta) = \boxed{\text{ス}}$  となる  $\theta$  の値は, 小さい順に,  $\frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}$ ,

$\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}$  である。



2

連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots ① \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots ② \end{cases}$$

を満たす実数  $x, y$  を求めよう。

真数の条件により、 $x, y$  のとり得る値の範囲は  である。 に当てはまるものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。ただし、対数  $\log_a b$  に対し、 $a$  を底といい、 $b$  を真数という。

- ①  $x > 0, y > 0$       ②  $x > 2, y > 3$       ③  $x > -2, y > -3$   
 ④  $x < 0, y < 0$       ⑤  $x < 2, y < 3$       ⑥  $x < -2, y < -3$

底の変換公式により  $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\text{イ}}$  である。

よって、① から

$$y = \text{ウ}x + \text{エ} \quad \dots\dots ③$$

が得られる。

次に、 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  とおき、③ を用いて② を  $t$  の方程式に書き直すと

$$t^2 - \text{オカ}t + \text{キク} = 0 \quad \dots\dots ④$$

が得られる。また、 $x$  が  における  $x$  の範囲を動くとき、 $t$  のとり得る値の範囲は

$$\text{ケ} < t < \text{コ} \quad \dots\dots ⑤$$

である。

⑤ の範囲で方程式④ を解くと、 $t = \text{サ}$  となる。したがって、連立方程式①、② を満たす実数  $x, y$  の値は

$$x = \log_3 \frac{\text{シ}}{\text{ス}}, \quad y = \log_3 \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$$

であることがわかる。



3

$p, q$  を実数とし、関数  $f(x) = x^3 + px^2 + qx$  は  $x = -1$  で極値 2 をとるとする。また、座標平面上の曲線  $y = f(x)$  を  $C$ 、放物線  $y = -kx^2$  を  $D$ 、放物線  $D$  上の点  $(a, -ka^2)$  を  $A$  とする。ただし、 $k > 0, a > 0$  である。

- (1) 関数  $f(x)$  が  $x = -1$  で極値をとるので、 $f'(-1) = \boxed{\text{ア}}$  である。これと  $f(-1) = 2$  より、 $p = \boxed{\text{イ}}$ 、 $q = \boxed{\text{ウエ}}$  である。よって、 $f(x)$  は  $x = \boxed{\text{オ}}$  で極小値  $\boxed{\text{カキ}}$  をとる。
- (2) 点  $A$  における放物線  $D$  の接線を  $l$  とする。 $D$  と  $l$  および  $x$  軸で囲まれた図形の面積  $S$  を  $a$  と  $k$  を用いて表そう。

$l$  の方程式は

$$y = \boxed{\text{クケ}} kax + ka \boxed{\text{コ}} \dots\dots \textcircled{1}$$

と表せる。 $l$  と  $x$  軸の交点の  $x$  座標は  $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$  であり、 $D$  と  $x$  軸および直線  $x = a$  で囲

まれた図形の面積は  $\frac{k}{\boxed{\text{ス}}} a \boxed{\text{セ}}$  である。よって、 $S = \frac{k}{\boxed{\text{ソタ}}} a \boxed{\text{セ}}$  である。

- (3) さらに、点  $A$  が曲線  $C$  上にあり、かつ (2) の接線  $l$  が  $C$  にも接するとする。このときの (2) の  $S$  の値を求めよう。

$A$  が  $C$  上にあるので、 $k = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}$  である。

$l$  と  $C$  の接点の  $x$  座標を  $b$  とすると、 $l$  の方程式は  $b$  を用いて

$$y = \boxed{\text{ト}} (b^2 - \boxed{\text{ナ}})x - \boxed{\text{ニ}} b^3 \dots\dots \textcircled{2}$$

と表される。②の右辺を  $g(x)$  とおくと

$$f(x) - g(x) = (x - \boxed{\text{ヌ}})^2 (x + \boxed{\text{ネ}} b)$$

と因数分解されるので、 $a = -\boxed{\text{ネ}} b$  となる。①と②の表す直線の傾きを比較する

ことにより、 $a^2 = \frac{\boxed{\text{ノハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$  である。

したがって、求める  $S$  の値は  $\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$  である。



4

初項が3, 公比が4の等比数列の初項から第 $n$ 項までの和を $S_n$ とする。また, 数列 $\{T_n\}$ は, 初項が $-1$ であり,  $\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1)  $S_2 = \boxed{\text{アイ}}$ ,  $T_2 = \boxed{\text{ウ}}$  である。

(2)  $\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は, それぞれ

$$S_n = \boxed{\text{エ}}^{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}$$

$$T_n = \frac{\boxed{\text{キ}}^{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - n - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。ただし,  $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ については, 当てはまるものを, 次の①～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでよい。

①  $n-1$     ②  $n$     ③  $n+1$     ④  $n+2$     ⑤  $n+3$

(3) 数列 $\{a_n\}$ は, 初項が $-3$ であり, 漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

そのために,  $b_n = \frac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。 $\{b_n\}$ の初項は

$\boxed{\text{シス}}$  である。

$\{T_n\}$ は漸化式

$$T_{n+1} = \boxed{\text{セ}}T_n + \boxed{\text{ソ}}n + \boxed{\text{タ}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすから,  $\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = \boxed{\text{チ}}b_n + \boxed{\text{ツ}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすことがわかる。よって,  $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{\text{テト}} \cdot \boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ニ}}$$

である。ただし,  $\boxed{\text{ナ}}$ については, 当てはまるものを, 次の①～④のうちから一つ選べ。

①  $n-1$     ②  $n$     ③  $n+1$     ④  $n+2$     ⑤  $n+3$

したがって,  $\{T_n\}$ ,  $\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ヌ}}(\boxed{\text{ネ}}n + \boxed{\text{ノ}})\boxed{\text{チ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。



5

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

- (1) ある食品を摂取したときに、血液中の物質 A の量がどのように変化するか調べたい。食品摂取前と摂取してから 3 時間後に、それぞれ一定量の血液に含まれる物質 A の量 (単位は mg) を測定し、その変化量、すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を  $X$  とする。 $X$  の期待値 (平均) は  $E(X) = -7$ 、標準偏差は  $\sigma(X) = 5$  とする。

このとき、 $X^2$  の期待値は  $E(X^2) =$   である。

また、測定単位を変更して  $W = 1000X$  とすると、その期待値は  $E(W) = -7 \times 10^{\text{ワ}}$ 、分散は  $V(W) = 5^{\text{エ}} \times 10^{\text{オ}}$  となる。

- (2) (1) の  $X$  が正規分布に従うとすると、物質 A の量が減少しない確率  $P(X \geq 0)$  を求めよう。この確率は

$$P(X \geq 0) = P\left(\frac{X+7}{5} \geq \text{カ} . \text{キ}\right)$$

であるので、標準正規分布に従う確率変数を  $Z$  とすると、正規分布表から、次のように求められる。

$$P(Z \geq \text{カ} . \text{キ}) = 0. \text{クケ} \dots\dots \text{①}$$

無作為に抽出された 50 人がこの食品を摂取したときに、物質 A の量が減少するか、減少しないかを考え、物質 A の量が減少しない人数を表す確率変数を  $M$  とする。 $M$  は二項分布  $B(50, 0. \text{クケ})$  に従うので、期待値は  $E(M) = \text{コ} . \text{サ}$ 、標準偏差は  $\sigma(M) = \sqrt{\text{シ} . \text{ス}}$  となる。ただし、 $0. \text{クケ}$  は①で求めた小数第 2 位までの値とする。

- (3) (1) の食品摂取前と摂取してから 3 時間後に、それぞれ一定量の血液に含まれる別の物質 B の量 (単位は mg) を測定し、その変化量、すなわち摂取後の量から摂取前の量を引いた値を表す確率変数を  $Y$  とする。 $Y$  の母集団分布は母平均  $m$ 、母標準偏差 6 をもつとする。 $m$  を推定するため、母集団から無作為に抽出された 100 人に対して物質 B の変化量を測定したところ、標本平均  $\bar{Y}$  の値は  $-10.2$  であった。

このとき、 $\bar{Y}$  の期待値は  $E(\bar{Y}) = m$ 、標準偏差は  $\sigma(\bar{Y}) = \text{セ} . \text{ソ}$  である。

$\bar{Y}$  の分布が正規分布で近似できるとすれば、 $Z = \frac{\bar{Y} - m}{\text{セ} . \text{ソ}}$  は近似的に標準正規

分布に従うとみなすことができる。

正規分布表を用いて  $|Z| \leq 1.64$  となる確率を求めると  $0. \text{タチ}$  となる。

このことを利用して、母平均  $m$  に対する信頼度  % の信頼区間、すなわち、

タチ %の確率で  $m$  を含む信頼区間を求めると、ツ となる。

ツ に当てはまる最も適当なものを、次の ① ~ ④ のうちから一つ選べ。

①  $-11.7 \leq m \leq -8.7$

②  $-11.4 \leq m \leq -9.0$

③  $-11.2 \leq m \leq -9.2$

④  $-10.8 \leq m \leq -9.6$