
第 1 章

～ 関数 ～

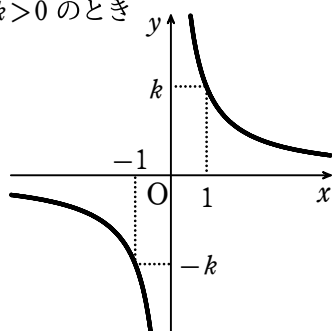
第1講 分数関数／無理関数

1 分数関数

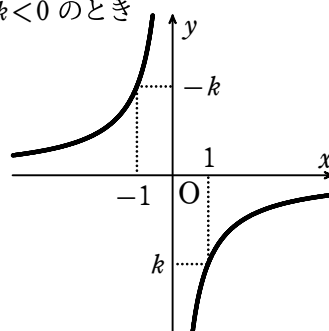
① 分数関数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

- 1 グラフは、 x 軸と y 軸を漸近線とする直角双曲線で、原点に関して対称である。
- 2 定義域は $x \neq 0$ ，値域は $y \neq 0$ である。

$k > 0$ のとき



$k < 0$ のとき



② 分数関数 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)

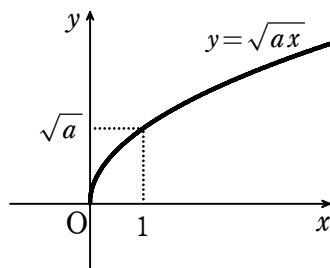
- 1 グラフは、 $y = \frac{k}{x}$ のグラフを x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動した曲線で、漸近線は2直線 $x = p$ ， $y = q$ である。
- 2 定義域は $x \neq p$ ，値域は $y \neq q$ である。

2 無理関数

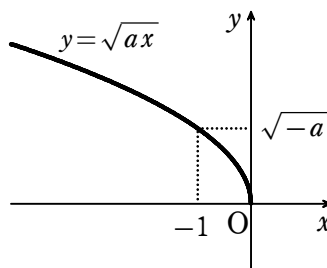
① 無理関数 $y = \sqrt{ax}$ ($a \neq 0$)

- 1 グラフは、軸が x 軸，頂点が原点である放物線 $y^2 = ax$ の x 軸より上側の部分である。ただし，原点を含む。
- ② $y = -\sqrt{ax}$ のグラフは，軸が x 軸，頂点が原点である放物線 $y^2 = ax$ の x 軸より下側の部分である。ただし，原点を含む。
- 2 $a > 0$ のとき，定義域は $x \geq 0$ ，値域は $y \geq 0$ で，増加関数である。
 $a < 0$ のとき，定義域は $x \leq 0$ ，値域は $y \geq 0$ で，減少関数である。

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



② 無理関数 $y = \sqrt{a(x-p)} + q$ ($a \neq 0$)

- 1 グラフは、 $y = \sqrt{ax}$ のグラフを x 軸方向に p ， y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である。
- 2 定義域は $a(x-p) \geq 0$ を満たす実数 x の値全体，値域は $y \geq q$ である。

第1講 例題

1 ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また、漸近線を求めよ。

(1) [1] $y = -\frac{2}{x+3}$ [2] $y = \frac{3}{x-2} - 1$ [3] $y = \frac{9x-10}{6x-4}$

(2) (1)において、定義域が $-2 \leq x \leq 0$ のとき、値域を求めよ。

2 ★★★

関数 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ のグラフが2直線 $x=3$, $y=1$ を漸近線とし、更に点 $(2, 2)$ を通るとき、定数 a , b , c の値を求めよ。

3 ★★★

(1) 関数 $y = \frac{2}{x+3}$ のグラフと直線 $y = x+4$ の共有点の座標を求めよ。

(2) 不等式 $\frac{2}{x+3} < x+4$ を解け。

4 ★☆☆

次の関数のグラフをかけ。また、その定義域と値域を求めよ。

(1) $y = \sqrt{x-2}$ (2) $y = -\sqrt{x+4}$ (3) $y = \sqrt{-2x+5}$ (4) $y = -\sqrt{5-3x}$

5 ★★★

(1) 関数 $y = \sqrt{x+6}$ のグラフと直線 $y = x$ の共有点の x 座標を求めよ。

(2) 不等式 $\sqrt{x+6} > x$ を解け。

6 ★★★

方程式 $2\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x + k$ の実数解の個数を、定数 k の値によって調べよ。

第1講 例題演習

1

(1) 次の関数のグラフをかけ。また、漸近線を求めよ。

(ア) $y = \frac{3x+5}{x+1}$

(イ) $y = \frac{-2x+5}{x-3}$

(ウ) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

(2) (1) の (ア), (イ) の各関数において、定義域が $2 \leq x \leq 4$ のとき、値域を求めよ。

2

$y = \frac{ax+b}{2x+c}$ のグラフが点 $(1, 2)$ を通り、2 直線 $x=2$, $y=1$ を漸近線とすると、定数 a, b, c の値を求めよ。

3

(1) 関数 $y = \frac{1}{x-2}$ のグラフと直線 $y=x$ の共有点の x 座標を求めよ。

(2) 不等式 (ア) $\frac{1}{x-2} > x$, (イ) $\frac{1}{x-2} \leq x$ を解け。

4

(1) 次の関数のグラフをかけ。また、値域を求めよ。

(ア) $y = \sqrt{3x-4}$

(イ) $y = \sqrt{-2x+4} \quad (-2 \leq x \leq 1)$

(ウ) $y = \sqrt{2-x} - 1$

(2) 関数 $y = \sqrt{2x+4} \quad (a \leq x \leq b)$ の値域が $1 \leq y \leq 3$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

5

(1) 関数 $y = \sqrt{4-x}$ のグラフと直線 $y = x-2$ の共有点の x 座標を求めよ。

(2) 不等式 $\sqrt{4-x} > x-2$ を解け。

6

方程式 $\sqrt{2x+1} = x+k$ の実数解の個数を、定数 k の値によって調べよ。

第1講 レベルA

1

曲線 $y = \frac{4x+1}{2x-1}$ は、直角双曲線 $y = \frac{\boxed{}}{x}$ を x 軸方向に $^1\boxed{}$ ， y 軸方向に $^2\boxed{}$ だけ平行移動したものであり、この曲線の漸近線の方程式は $^3\boxed{}$ である。

2 [成蹊大]

関数 $y = \frac{ax+b}{2x+1}$ …… ① のグラフは点 $(1, 0)$ を通り、 $y=1$ を漸近線にもつ。

- (1) 定数 a, b の値を求めよ。
- (2) ① のグラフを利用して、不等式 $\frac{ax+b}{2x+1} > x-2$ を解け。

3

$y = \sqrt{2x-3} + 1$ のグラフと直線 $y = mx + 2$ が共有点をもつような実数 m の値の範囲を求めよ。

4

関数 $y = \sqrt{ax+b}$ が $-1 \leq x \leq 3$ の範囲において、最大値 3，最小値 1 をとるように、定数 a, b の値を定めよ。

5 [自治医科大]

不等式 $\sqrt{ax+b} > x-2$ ($a \neq 0$) を満たす x の範囲が $3 < x < 6$ となるとき、 $|a+b|$ の値を求めよ。

第 1 講 レベル B

① [岡山大]

a を正の実数とする。 $x \geq 0$ のとき、 $y = \frac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

② [弘前大]

座標平面の 2 点 $A(1, 2)$, $B(3, 0)$ に対して、 $BP - AP > 2$ を満たす点 P の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

③

xy 平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 1)$ を頂点とする三角形の内部に点 P をとり、直線 OP と線分 AB の交点を Q とする。 $\triangle OAB$ と $\triangle PQB$ の面積比が $6:1$ となるような点 P の軌跡を求め、図示せよ。

第2講 逆関数／合成関数

3 逆関数と合成関数

1 逆関数

$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の求め方

- 1 $y=f(x)$ を x について解き, $x=g(y)$ の形にする。
- 2 x と y を入れかえて, $y=g(x)$ とする。
逆関数 $g(x)$ の定義域は, もとの関数 $f(x)$ の値域と同じ。

2 逆関数の性質 関数 $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表す。

- 1 $b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$
- 2 関数 $y=f(x)$ のグラフとその逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは, 直線 $y=x$ に関して対称である。
- 3 $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ では, 定義域と値域が入れかわる。

3 合成関数

関数 $g(f(x))$ を $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数といい, $(g \circ f)(x)$ とも書く。

〔注〕 一般に, $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ は同じ関数ではない。

第2講 例題

1 ★☆☆

次の関数の逆関数を求めよ。また、与えられた関数とその逆関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3x + 2$

(2) $y = 2 - 2x \quad (0 \leq x \leq 2)$

(3) $y = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$

(4) $y = \sqrt{2x}$

2 ★★☆☆

関数 $y = \frac{2x+1}{x+p}$ ……① の逆関数が、もとの関数と一致するという。このとき、定数 p の値を求めよ。

3 ★★☆☆

関数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について、 $f(1)=3$, $f^{-1}(2)=4$ であるとき、定数 a , b の値を求めよ。

4 ★☆☆

$f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x + 3$, $h(x) = \sin x$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(g \circ f)(x)$

(2) $(f \circ g)(x)$

(3) $(g \circ h)(x)$

5 ★★☆☆

$(f \circ f)(x) = x$ かつ $f(-2) = -5$ を満たす1次関数 $f(x)$ を求めよ。

6 ★★★★★

$x (0 \leq x \leq 1)$ の関数 $y = f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} 2x & \left(0 \leq x < \frac{1}{2}\right) \\ 2-2x & \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right) \end{cases}$ と定義する。

(1) $y = f(x)$ のグラフを描け。 (2) 不等式 $f(x) > \frac{1}{2}$ を解け。

(3) $g(x) = f(f(x))$ とするとき、方程式 $g(x) = \frac{1}{2}$ を解け。

第2講 例題演習

1

次の関数の逆関数を求めよ。また、もとの関数と逆関数のグラフをかけ。

(1) $y = 3x - 2$

(2) $y = -2x + 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$

(3) $y = x^2 + 1 \quad (x \leq 0)$

(4) $y = \sqrt{2-x}$

(5) $y = 4^x$

(6) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2

$y = f(x)$ の逆関数がもとの関数と一致するとき、定数 p の値を求めよ。

(1) $f(x) = px + 3$

(2) $f(x) = \frac{2x-3}{x+p}$

3

関数 $f(x) = ax + b$ について $f(1) = 2$, $f^{-1}(5) = 2$ であるとき、定数 a , b の値を求めよ。

4

関数 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -x^2 + 1$, $h(x) = \frac{1}{x-1}$ について、次の合成関数を求めよ。

(1) $(f \circ g)(x)$

(2) $(g \circ f)(x)$

(3) $((f \circ g) \circ h)(x)$

(4) $(f \circ (g \circ h))(x)$

5

$f(x) = ax + 3$, $g(x) = 2x - 5$ について、2つの合成関数 $(f \circ g)(x)$ と $(g \circ f)(x)$ が一致するとき、定数 a の値を求めよ。

6

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -2x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$ のように定義された関数 $f(x)$ について

(1) $y = (f \circ f)(x)$ のグラフをかけ。 (2) $(f \circ f)(a) = f(a)$ となる a を求めよ。

第2講 レベルA

1

関数 $f(x) = \frac{3x}{x+1}$, $g(x) = 2x-1$ について, 逆関数 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$, $(f \circ g)^{-1}(x)$ を求めよ。

2

2つの関数 $f(x) = x+2$, $g(x) = x^2$ に対し, $(f \circ h)(x) = g(x)$ を満たす x の2次関数 $h(x)$ を求めよ。

3

関数 $y = \sqrt{x+1}$ のグラフと, その逆関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

4

関数 $y = f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ の値域が $y \leq 0$, $5 \leq y$ のとき, $y = f^{-1}(x)$ とその値域を求めよ。

5 [芝浦工業大]

$y = \frac{2^{3x} + 4^{x+1} + 2^{x+2}}{2^x + 2}$ を簡単にせよ。また, この逆関数を求めよ。

6 [近畿大]

関数 $f(x) = \frac{2x+a}{x+1}$, $g(x) = \frac{3x+b}{x+c}$ を考える。 a , b , c は定数とする。合成関数

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ が $(f \circ g)(x) = \frac{9x+8}{4x+3}$ を満たすとき, $a = \text{ア}$, $b = \text{イ}$,

$c = \text{ウ}$ である。

第2講 レベルB

1

$f(x) = 2x - 4$, $g(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$, $h(x) = \begin{cases} x - 1 & (x < 1) \\ x^2 - 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ のとき、次の関数を求めよ。

- (1) $(f \circ g)(x)$ (2) $(g \circ f)(x)$ (3) $(h \circ g)(x)$

2 [金沢工業大]

関数 $f(x) = \sqrt{7x - 3} - 1$ について考える。

- (1) $f(x)$ の逆関数を求めよ。
 (2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ との交点の座標を求めよ。
 (3) 不等式 $f^{-1}(x) \leq f(x)$ を解け。

3 [東京理科大]

x の関数 $f(x)$ に対して、式 $f(x) = -f(-x)$ および式 $f(2x) = \frac{a \cdot 4^x + a - 4}{4^x + 1}$ が成り立つ。

ただし、 a は実数の定数である。

- (1) $a = \boxed{}$ である。
 (2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について、 $f^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \log_2 \uparrow \boxed{} - \log_2 \uparrow \boxed{}$ である。

4 [龍谷大]

- (1) 多項式 $f(x)$ について、 $f(a) = a$ が満たされるとき、 $f(f(x)) - x$ は $x - a$ で割り切れることを示せ。
 (2) $f(x) = x^2 - x - 2$ のとき、 $f(f(x)) - x = 0$ を満たす x の値を求めよ。

5

- (1) a, b を実数とし、 $f(x) = \frac{x+1}{ax+b}$ とするとき、 $(f \circ f)(x) = x$ を満たす a, b の値を求めよ。
 (2) a は実数で $a \neq 0$ とし、 $f(x) = \frac{ax+1}{-ax}$ とするとき、 $(f \circ (f \circ f))(x) = x$ を満たす a の値を求めよ。ただし、 $(f \circ (f \circ f))(x)$ は $f((f \circ f)(x))$ を意味する。

章末問題 A

1 [東京理科大]

座標平面において、曲線 $y = -\frac{5}{4x}$ を x 軸方向に $-\frac{1}{2}$, y 軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動した曲線を C_1 とすると、 C_1 の方程式は、 $y = \frac{\text{ }}{\text{ }}$ である。また、曲線 C_1 を y 軸に関して対称移動した曲線を C_2 とすると、 C_2 の方程式は、 $y = \frac{\text{ }}{\text{ }}$ である。次に、曲線 C_1 を原点に関して対称移動した曲線を C_3 とすると、 C_3 の方程式は、 $y = \frac{\text{ }}{\text{ }}$ である。

2 [法政大]

2つの関数 $y = \frac{1}{x-1}$ と $y = -|x| + k$ のグラフが2個以上の点を共有する k の値の範囲は $\text{ } \text{ } \text{ }$ である。

3 [名城大]

- (1) 直線 $l: y = x + 1$ に関して、点 (a, b) と対称な点の座標を求めよ。
- (2) 点 P が曲線 $y = \frac{2x+1}{x-3}$ 上を動くとき、 l に関して P と対称な点 Q の軌跡の方程式を求めよ。

4 [久留米大]

- (1) $-4 \leq x \leq 0$ のとき、 $y = \sqrt{a-4x} + b$ の最大値が5、最小値が3であるとき、 $a = \frac{\text{ }}{\text{ }}$, $b = \frac{\text{ }}{\text{ }}$ となる。ただし、 $a > 0$ とする。
- (2) $-4 \leq x \leq a$ のとき、 $y = \sqrt{9-4x} + b$ の最大値が6、最小値が4であるとき、このとき、 $a = \text{ } \text{ } \text{ }$, $b = \text{ } \text{ } \text{ }$ である。

5 [青山学院大]

xy 平面で、 $x > 1, y > 0, y \neq 1$ かつ $2\log_x y + \log_y x > 3$ の条件を満たす点 (x, y) の集合を図示せよ。

6 [城西大]

次の2つの曲線 $y = \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 2$), $y = \sqrt{2-x}$ ($0 \leq x \leq 2$) と x 軸とで囲まれた領域に含まれ、1辺を x 軸上にもつ長方形がある。このような長方形の面積の最大値を求めよ。

章末問題A

7 [東京理科大]

x の関数 $f(x) = a - \frac{3}{2^x + 1}$ を考える。ただし、 a は実数の定数である。

- (1) $a = \boxed{}$ のとき、 $f(-x) = -f(x)$ が常に成り立つ。
- (2) a が (1) の値のとき、 $f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_2 \boxed{}$ である。

8 [神戸商科大]

以下の各問いに答えよ。

- (1) a を 1 と異なる正の定数とすると、関数 $y = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の逆関数 $x = g(y)$ を求めよ。
- (2) a を 1 と異なる正の定数とすると、関数 $y = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ において、 y のとりうる値の範囲を求めよ。また、この関数の逆関数 $x = h(y)$ を求めよ。

9 [京都産業大]

関数 $f(x) = x^2 + 2x - 6$ について、方程式 $f(x) = x$ を解くと、 $x = \sqrt{}, \sqrt[3]{}$ である。さらに、方程式 $f(f(x)) = f(x)$ を解くと、 $x = \sqrt{}, \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[5]{}$ である。ただし、 $\sqrt{} < \sqrt[3]{}, \sqrt[4]{} < \sqrt[5]{}$ とする。

10

関数 $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f \circ g)(x)$ は、その定義域において $(f \circ g)(x) = x$ を満たしている。このとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

章末問題B

1 [名城大]

点 $(2, 2)$ を通り、傾きが m ($\neq 0$) である直線 ℓ と曲線 $y = \frac{1}{x}$ との 2 つの交点を

$P\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, $Q\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ とし、線分 PQ の中点を $R(u, v)$ とする。 m の値が変化するとき、点 R が動いてできる曲線を C とする。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) u および v をそれぞれ m の式で表せ。
- (3) 曲線 C の方程式を求め、その概形をかけ。

2 [慶応義塾大]

関数 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ が次の条件 (A), (B) を満たすとき、 a, b, c の値を求めよ。

(A) 曲線 $y = f(x)$ は直線 $y = x + 1$ と 2 点で交わり、その 2 つの交点の x 座標は絶対値が等しい。

(B) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸との交点は、ともに直線 $y = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$ 上にある。

3 [岐阜薬科大]

方程式 $y = -x^2 + 4$, $y = x^2 - 2x$ で表される曲線をそれぞれ C_1, C_2 とする。

C_1, C_2 によって囲まれた領域 (境界も含む) を G として、次の問いに答えよ。

- (1) G はある点 P に関して点対称である (つまり点 Q が G 上を動くとき、ある点 P に関する Q の対称点 Q' も G 上を動く) ことを示せ。
- (2) 点 (x, y) が G 上を動くとき、 $xy + 5x + 3y$ の最大値を求めよ。

4 [金沢大]

(1) (ア) $y = 1 - |x|$ (イ) $y = \frac{1}{1 + |x|}$ のグラフの概形を別々にかけ。

(2) 区間 $-1 \leq x \leq 1$ において、不等式 $(ax + b)(1 - x^2) \leq 1 - |x|$ が成り立つとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ。

章末問題B

5 [近畿大]

定数 a に対して関数 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4x+a^2-6a-7} - \frac{3-a}{2}$ を考え、 $y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ とする。

- (1) $y=f(x)$ の定義域を求めよ。また、 $y=f^{-1}(x)$ とその定義域を求めよ。
- (2) $y=f(x)$ のグラフと $y=f^{-1}(x)$ のグラフが接するときの a の値とその接点の座標を求めよ。

6 [杏林大]

- (1) 関数 $y=x+|x-a|$ のグラフ上の点で、 x 座標が a である点を P とする。実数 a の値が変化するとき、点 P の軌跡を求めよ。
- (2) 方程式 $\sqrt{x+2}=x+|x-a|$ が相異なる 2 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

7 [武蔵工業大]

- (1) 関数 $y=f(x)=x^2+1$ ($x \geq 0$) の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。また、 $g(x)$ の定義域を求めよ。
- (2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点と曲線 $y=g(x)$ 上の点を結ぶとき、その 2 点間の距離の最小値を求めよ。

8 [立命館大]

$y=f(x)=\sqrt{x-1}+1$ の逆関数を $y=g(x)$ とすると、 $g(x)=\boxed{}$ である。

いま、不等式 $y \leq f(x)$ と $y \geq g(x)$ を同時に満たす点 (x, y) の集合を M とし、 x, y によって定まる値 $F(x, y) = ay + bx$ の最小値を求める。

- (1) $a=0$ のとき、 $b>0$ なら最小値は $\overset{イ}{\boxed{}}$ 、 $b<0$ なら最小値は $\overset{ウ}{\boxed{}}$ である。

- (2) $a>0$ のとき $\frac{b}{a}$ が不等式 $\overset{エ}{\boxed{}}$ を満たすならば、 $x=x_0$ ($1<x_0<2$) に対して

$F(x, y)$ は最小値をとる。例えば、 $a=\overset{オ}{\boxed{}}$ 、 $b=\overset{カ}{\boxed{}}$ のとき、 $x=\frac{5}{4}$ 、

$y=\overset{キ}{\boxed{}}$ において、 $F(x, y)$ は最小値 $\frac{7}{8}$ をとる。

章末問題B

9

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_5(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_6(x) = \frac{x-1}{x}$ が

与えられているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $x \neq 0$, $x \neq 1$ とし、(2) の a , b は 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。

(1) 逆関数 $f_5^{-1}(x)$, $f_6^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) $f_5(f_a(x)) = f_3(x)$, $f_b(f_6(x)) = f_4(x)$ となる a , b の値を求めよ。

10 [同志社大]

関数 $f(x) = \frac{ax}{1+ax}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は $a > 1$ を満たす定数とする。

(1) 実数 t が $f(f(t)) = f(t)$ を満たすとき、 $f(t) = t$ も満たすことを示せ。

(2) x についての不等式 $f(f(x)) \geq f(x)$ を解け。

11

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ とする。

(1) $f(f(x))$ を求めよ。また、 $y = f(f(x))$ のグラフの概形をかけ。

(2) 直線 $y = bx + a$ と曲線 $y = f(f(x))$ とが共有点をもたないとき、点 (a, b) はどんな範囲にあるか。座標平面上に図示せよ。

12

x の関数 $f(x) = ax + 1$ ($0 < a < 1$) に対し、 $f_1(x) = f(x)$, $f_2(x) = f(f_1(x))$,

$f_3(x) = f(f_2(x))$, $\dots$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ [$n \geq 2$] とするとき、 $f_n(x)$ を求めよ。

章末問題C

1 [京都府立医科大]

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。関数 $y = f(x)$ のグラフが y 軸と平行なある直線に関して対称であるとする。

- (1) a, b, c, d が満たす関係式を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ は2つの2次関数の合成関数になっていることを示せ。

2 [早稲田大]

点 $A(a, b)$ は中心 $O(0, 0)$ 、半径1の円の内部およびその周上を動き、点 $P(p, q)$ は中心 $O'(4, 0)$ 、半径1の円の内部およびその周上を動くとする。このとき、

$$k = \frac{a+b-p-q}{a-b-p+q} \text{ とおく。}$$

- (1) 直線 AP の傾きを m とする。 k を m を用いて表せ。
- (2) k の値のとりうる範囲を求めよ。

3 [立命館大]

$-1 < x < 1$ で定義された関数 $f_t(x)$ を $f_t(x) = \frac{tx-1}{x-t}$ と定める。ただし $t > 1$ とする。

$f_t(x)$ の値域は $\text{ア} \square < f_t(x) < \text{イ} \square$ である。また、 $f_t(f_t(x)) = \text{ウ} \square$ であり、実数 s で $s \neq t$ 、 $s > 1$ を満たすものについて $g(x) = f_s(f_t(x))$ とおくと、

$$g(x) = \frac{\text{エ} \square x + \text{オ} \square}{\text{カ} \square} \text{ が成り立つ。ここで } R = \frac{\text{エ} \square - 1}{\text{エ} \square + 1} \text{ とし、} g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right) \text{ を}$$

R を用いて表すと $g\left(\frac{1-R^n}{1+R^n}\right) = \text{キ} \square$ である。ただし n は自然数とする。

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \frac{1-R}{1+R}$ 、 $a_{n+1} = g(a_n)$ ($n \geq 1$) と定めると、 $s < t$ のとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ク} \square$ であり、 $s > t$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{ケ} \square$ である。

章末問題C

4 [大阪市立大]

xy 平面において、 x 軸の $x < 0$ である部分を C_1 、 x 軸の $x > 1$ である部分を C_2 とする。また、2 点 $(0, -1)$ 、 $(1, -1)$ を結ぶ線分を K とする。 $y > 0$ を満たす点 (x, y) からは、 C_1 と C_2 が障害となり、 C_1 と C_2 の間を通してしか、 K は見えないものとする。点 $(s, 1)$ から見える K の部分の長さを $f(s)$ 、点 $(2, t)$ ($t > 0$) から見える K の部分の長さを $g(t)$ とおく。ただし、 K がまったく見えないとき、または、 K の 1 点のみが見えるとき、 $f(s)$ 、 $g(t)$ の値は 0 とする。

- (1) $f(s)$ を求めよ。また、 s が実数全体を動くとき、関数 $f(s)$ のグラフをかけ。
- (2) $g(t)$ を求めよ。また、 t が正の実数全体を動くとき、関数 $g(t)$ のグラフをかけ。

5 [神戸大]

- (1) t を正の実数とすると、 $|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。
- (2) a を $a \geq 0$ を満たす実数とする。 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

を満たすとき、 $|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を、 a を用いた式で表せ。

- (3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、(2) で求めた m の最大値を求めよ。

6 [広島大]

$f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$ とおく。

- (1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ。
- (2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ。
- (3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。
- (4) $x \geq 2$ ならば $|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し、これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。

7 [東京大]

座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha, \alpha^2)$ 、 $R(\beta, \beta^2)$ を、3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき、 $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ。