【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材②

中１甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｋ「数と式」
数学Ｔ「図形の性質」

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)^3(a-b)^3$ (2) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$\boxed{2}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-2xy-24y^2$ (2) $12x^2-7xy-12y^2$

(3) x^3+27 (4) $64p^3-27q^3$

$\boxed{3}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x-y)^2-3(x-y)-18$ (2) $a^2+6a+9-4b^2$

(3) $9x^4-13x^2+4$ (4) $(x^2+x-3)(x^2+x-5)-3$

$\boxed{4}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2b+ac-ab^2-bc$ (2) $3x^2+5xy-2y^2-x+5y-2$

(3) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$

$\boxed{5}$

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ (2) x^4+3x^2+4

$\boxed{6}$

(1) $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

$\boxed{7}$

$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$ (2) xy (3) x^2+y^2 (4) x^3+y^3

$\boxed{8}$

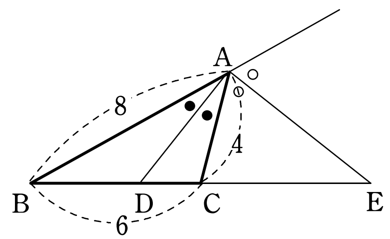
2 重根号をはずして，次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{21}}$ (2) $\sqrt{11-\sqrt{112}}$ (3) $\sqrt{10+5\sqrt{3}}$

$\boxed{9}$

AB$=8$，BC$=6$，CA$=4$ である △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，頂点 A における外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。次の線分の長さを求めよ。

(1) BD (2) DE



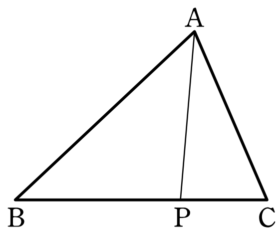
$\boxed{10}$

(1) 1 辺の長さが 7 の正三角形 ABC がある。辺 AB，AC 上に AD$=3$，AE$=6$ となるように 2 点 D，E をとる。このとき，BE，CD の交点を F，直線 AF と BC との交点を G とする。線分 CG の長さを求めよ。

(2) △ABC において，辺 AB 上と辺 AC の延長上にそれぞれ点 E，F をとり，AE : EB$=1:2$，AF : FC$=3:1$ とする。直線 EF と直線 BC との交点を D とするとき，BD : DC，ED : DF をそれぞれ求めよ。

$\boxed{11}$

△ABCにおいて，AB＞ACとする。辺BC上に頂点と異なる点Pをとるとき，AB＞APであることを証明しなさい。



$\boxed{12}$

△ABCの辺BCに平行な直線が，辺AB，ACと交わる点をそれぞれP，Qとし，辺BCの中点をMとするとき，3直線AM，BQ，CPは1点で交わることを証明せよ。

$\boxed{13}$

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$の整数部分をa，小数部分をbとするとき，$a+2b+b^2$の値を求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答 (1) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$ (2) x^6+26x^3-27

$\boxed{2}$

解答 (1) $(x+4y)(x-6y)$ (2) $(3x-4y)(4x+3y)$

(3) $(x+3)(x^2-3x+9)$ (4) $(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

$\boxed{3}$

解答 (1) $(x-y+3)(x-y-6)$ (2) $(a+2b+3)(a-2b+3)$

(3) $(x+1)(x-1)(3x+2)(3x-2)$ (4) $(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

$\boxed{4}$

解答 (1) $(a-b)(ab+c)$ (2) $(x+2y-1)(3x-y+2)$ (3) $(a+b)(b+c)(c+a)$

$\boxed{5}$

解答 (1) $(x^2+5x+5)^2$ (2) $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\boxed{6}$

解答 (1) $\sqrt{7}-2$ (2) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

$\boxed{7}$

解答 (1) 4 (2) 1 (3) 14 (4) 52

$\boxed{8}$

解答 (1) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{7}-2$ (3) $\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{9}$

解答 (1) 4 (2) 8

$\boxed{10}$

解答 (1) $\dfrac{7}{9}$ (2) BD：DC＝6：1，ED：DF＝4：3

$\boxed{11}$

解答 略

$\boxed{12}$

解答 略

$\boxed{13}$

解答 5

$\boxed{1}$

解説

(1) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$

$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$

$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$

(2) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+3)(x^2-3x+9)$

$=(x^3-1)(x^3+27)$

$=(x^3)^2+26x^3-27$

$=x^6+26x^3-27$

$\boxed{2}$

解説

(1) $x^2-2xy-24y^2=x^2+(4y-6y)x+4y\cdot(-6y)=(x+4y)(x-6y)$

(2) $12x^2-7xy-12y^2=(3x-4y)(4x+3y)$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \times & -4y & \longrightarrow & -16y \\ 4 & & 3y & \longrightarrow & 9y \\ \hline 12 & & -12y^2 & & -7y \end{array}$$

(3) $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$

(4) $64p^3-27q^3=(4p)^3-(3q)^3=(4p-3q)\{(4p)^2+(4p)\cdot(3q)+(3q)^2\}$

$=(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$

$\boxed{3}$

解説

(1) $(x-y)^2-3(x-y)-18=\{(x-y)+3\}\{(x-y)-6\}$

$=(x-y+3)(x-y-6)$

(2) $a^2+6a+9-4b^2=(a^2+6a+9)-4b^2=(a+3)^2-(2b)^2$

$=\{(a+3)+2b\}\{(a+3)-2b\}$

$=(a+2b+3)(a-2b+3)$

(3) $9x^4-13x^2+4=9(x^2)^2-13x^2+4$

$=(x^2-1)(9x^2-4)$

$=(x+1)(x-1)(3x+2)(3x-2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -1 & \longrightarrow & -9 \\ 9 & & -4 & \longrightarrow & -4 \\ \hline 9 & & 4 & & -13 \end{array}$$

(4) $(x^2+x-3)(x^2+x-5)-3=\{(x^2+x)-3\}\{(x^2+x)-5\}-3$

$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+15-3$

$=(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=\{(x^2+x)-2\}\{(x^2+x)-6\}$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-6)=(x+2)(x-1)(x+3)(x-2)$

$\boxed{4}$

(解説)

(1) (与式)$=(a-b)c+a^2b-ab^2=(a-b)c+ab(a-b)$

$=(a-b)(c+ab)=(a-b)(ab+c)$

(2) (与式)$=3x^2+(5y-1)x-(2y^2-5y+2)$

$=3x^2+(5y-1)x-(y-2)(2y-1)$

$=\{x+(2y-1)\}\{3x-(y-2)\}$

$=(x+2y-1)(3x-y+2)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y-1 & \longrightarrow & 6y-3 \\ 3 & & -(y-2) & \longrightarrow & -y+2 \\ \hline 3 & & -(y-2)(2y-1) & & 5y-1 \end{array}$$

(3) (与式)$=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ca+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)+8abc$

$=(b+c)a^2+\{(b^2-2bc+c^2)-2bc-2bc+8bc\}a+bc^2+b^2c$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)$

$\boxed{5}$

(解説)

(1) (与式)$=(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)+1=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}+1$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24+1=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25$

$=\{(x^2+5x)+5\}^2=(x^2+5x+5)^2$

(2) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2=(x^2+2)^2-x^2$

$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$\boxed{6}$

(解説)

(1) (与式)$=\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-2}{5-4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{6-5}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{7-6}$

$=(\sqrt{5}-2)+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})=\sqrt{7}-2$

(2) (与式)$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(2+2\sqrt{6}+3)-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

$\boxed{7}$

(解説)

(1) $x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{(3+2\sqrt{3}+1)+(3-2\sqrt{3}+1)}{3-1}=\dfrac{8}{2}=4$

(2) $xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$

(3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot1=16-2=14$

(4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot1\cdot4=64-12=52$

別解　$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$

$=4(14-1)=4\cdot 13=52$

8

解説

(1)　$\sqrt{10+2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)+2\sqrt{7\cdot 3}}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{11-\sqrt{112}}=\sqrt{11-2\sqrt{28}}=\sqrt{(7+4)-2\sqrt{7\cdot 4}}=\sqrt{7}-\sqrt{4}=\sqrt{7}-2$

(3)　$\sqrt{10+5\sqrt{3}}=\sqrt{10+\sqrt{75}}=\sqrt{\dfrac{20+2\sqrt{75}}{2}}=\dfrac{\sqrt{20+2\sqrt{75}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(15+5)+2\sqrt{15\cdot 5}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(\sqrt{15}+\sqrt{5})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{2}$

9

解説

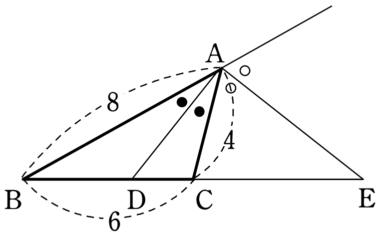
(1)　AD は ∠A の二等分線であるから

AB：AC＝BD：DC

すなわち　8：4＝BD：(6－BD)

よって　8(6－BD)＝4BD

これを解いて　BD＝4



(2)　AE は頂点 A における外角の二等分線であるから　AB：AC＝BE：EC

すなわち　8：4＝BE：(BE－6)

よって　8(BE－6)＝4BE　これを解いて　BE＝12

したがって　DE＝BE－BD＝12－4＝8

10

解説

(1)　AD＝3，DB＝7－3＝4，AE＝6，CE＝7－6＝1

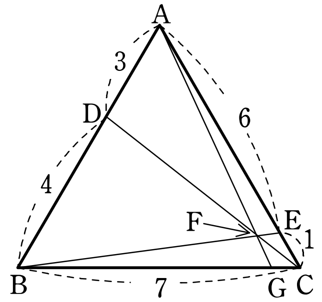
チェバの定理により

$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BG}{GC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

ゆえに　$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{BG}{GC}\cdot\dfrac{1}{6}=1$

よって　BG＝8GC

ゆえに　$CG=\dfrac{1}{9}\cdot BC=\dfrac{1}{9}\cdot 7=\dfrac{7}{9}$



(2)　△ABC と直線 EF について，メネラウスの定理により

$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AE}{EB}=1$

ゆえに　$\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=1$

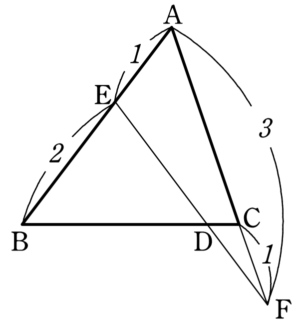
よって　BD：DC＝6：1

△AEF と直線 BC について，メネラウスの定理により

$\dfrac{ED}{DF}\cdot\dfrac{FC}{CA}\cdot\dfrac{AB}{BE}=1$

ゆえに　$\dfrac{ED}{DF}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

よって　ED：DF＝4：3



11

解説

△ABC において，AB＞AC であるから

∠ACB＞∠ABC

すなわち　∠ACP＞∠ABP

△ACP の内角と外角の関係から

∠APB＝∠PAC＋∠ACP

よって　∠APB＝∠PAC＋∠ACP

＞∠ACP

$>\angle ABP$

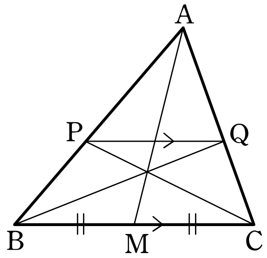
すなわち　$\angle APB > \angle ABP$

したがって，$\triangle ABP$ の辺と角の大小関係より

$AB > AP$

12

解説



PQ∥BC であるから　$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}$

また，M は辺 BC の中点であるから　BM＝MC

よって　$\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AP}{PB}=1\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AQ}{QC}=1$

したがって，チェバの定理の逆により，3 直線 AM，BQ，CP は 1 点で交わる。

13

解説

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから　$3<2+\sqrt{3}<4$

よって　$a=3$，$b=(2+\sqrt{3})-3=\sqrt{3}-1$

したがって　$a+2b+b^2=3+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2$

$=3+2\sqrt{3}-2+(3-2\sqrt{3}+1)=5$

別解　$a+2b+b^2=a+b(b+2)=3+(\sqrt{3}-1)\{(\sqrt{3}-1)+2\}$

$=3+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)=3+(3-1)=5$

別解　$a+2b+b^2=a+(b+1)^2-1=3+\{(\sqrt{3}-1)+1\}^2-1$

$=3+(\sqrt{3})^2-1=3+3-1=5$