

1

解説

(1) $a=1$ のとき, ① の左辺は

$$\begin{aligned} (4x^2-1)b+16x-8 &= (2x+1)(2x-1)b+8(2x-1) \\ &= (2x-1)\{(2x+1)b+8\} \\ &= (2x-1)(2bx+b+8) \end{aligned}$$

(2) $b=2$ のとき

(i) ① の左辺は

$$\begin{aligned} (2a+6)x^2+(5a+11)x-10 &= (2x^2+5x)a+6x^2+11x-10 \\ &= (2x+5)xa+(2x+5)(3x-2) \\ &= (2x+5)(ax+3x-2) \\ &= (2x+5)\{(a+3)x-2\} \end{aligned}$$

別解 $(2a+6)x^2+(5a+11)x-10 = (2x+5)\{(a+3)x-2\} \dots\dots ③$

2	\times	5	\longrightarrow	$5a+15$
$a+3$	\times	-2	\longrightarrow	-4
$2a+6$	-10	$5a+11$		

(ii) $a=2\sqrt{2}$ を ③ に代入すると $(2x+5)\{(2\sqrt{2}+3)x-2\}$

よって, ① の解は $x = -\frac{5}{2}, \frac{2}{2\sqrt{2}+3}$

$\frac{2}{2\sqrt{2}+3}$ の分母を有理化すると $\frac{2(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)} = \frac{4\sqrt{2}-6}{8-9} = 6-4\sqrt{2}$

(iii) $a=-3$ を ③ に代入すると $(2x+5)(0 \cdot x-2)$

よって $a=-3 \implies$ ① の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけである は真。

① の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるとき $a=-3$ または ① が重解 $x = -\frac{5}{2}$ をもつ

① が重解 $x = -\frac{5}{2}$ をもつとき, ③ から $(a+3)x-2=0$ が $x = -\frac{5}{2}$ を解にもつ

ゆえに $-\frac{5}{2}(a+3)-2=0$

これを解くと $a = -\frac{19}{5}$

よって ① の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけである $\implies a = -3$ は偽。(反例) $a = -\frac{19}{5}$

したがって, $a = -3$ であることは, ① の解が $x = -\frac{5}{2}$ だけであるための十分条件

であるが, 必要条件ではない。(ケ ①)

2

解説

(1) $\angle AOH = \alpha$ であるから $AH = 2 \sin \alpha$

よって $PA = 2AH = 4 \sin \alpha \dots\dots ①$

同様に、 $\angle BO'H' = \beta$ であるから

$$BH' = 4 \sin \beta$$

ゆえに $PB = 2BH' = 8 \sin \beta \dots\dots ②$

$\triangle PAB$ の外接円の半径を R_1 とおくと、正弦定理により

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} = 2R_1 \dots\dots ③$$

$$(\mp ①, \circlearrowleft ②)$$

$$\frac{PA}{\sin \beta} = \frac{PB}{\sin \alpha} \text{ の両辺に } \sin \alpha \sin \beta \text{ を掛けて } PA \sin \alpha = PB \sin \beta \dots\dots ④$$

この式に、①と②を代入すると $4 \sin \alpha \cdot \sin \alpha = 8 \sin \beta \cdot \sin \beta$

よって $\sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \beta$ ゆえに $\sin \alpha = \pm \sqrt{2} \sin \beta$

α は鋭角であり、図より β も鋭角であるから $0 < \sin \alpha < 1, 0 < \sin \beta < 1$

よって $\sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$

これを④に代入すると $PA \cdot \sqrt{2} \sin \beta = PB \sin \beta$

ゆえに $PB = \sqrt{2} PA$

これと、③から $\frac{\sqrt{2} PA}{\sin \alpha} = 2R_1$

①を代入して $\frac{\sqrt{2} \cdot 4 \sin \alpha}{\sin \alpha} = 2R_1$

$$\text{よって } R_1 = 2\sqrt{2}$$

(2) 右の図のように、円 O の中心 O から直線 QA に引いた垂線と直線 QA との交点を I 、円 O' の中心 O' から直線 QB に引いた垂線と直線 QB との交点を I' とする。

$\angle AOI = \angle QAB$ であるから

$$AI = 2 \sin \angle QAB$$

よって $QA = 2AI = 4 \sin \angle QAB$

同様に、 $\angle BO'I' = \angle QBA$ であるから $BI' = 4 \sin \angle QBA$

ゆえに $QB = 2BI' = 8 \sin \angle QBA$

これらは(1)と同様の式であるから、(1)

と同じ方法で $R_2 = 2\sqrt{2}$ が導かれる。

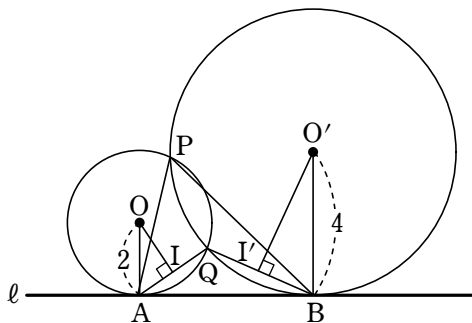
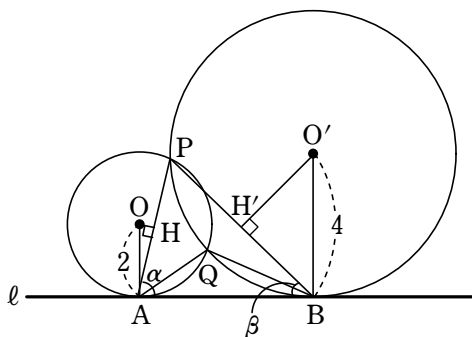
よって $R_1 = R_2$ (ケ ①)

また、 $\triangle PAB$ において、正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin \angle APB} = 2R_1 \dots\dots ⑤$$

$\triangle QAB$ において、正弦定理により

$$\frac{AB}{\sin \angle AQB} = 2R_2$$



$$R_1 = R_2 \text{ から } \frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{AB}{\sin \angle AQB}$$

$$\text{よって } \sin \angle APB = \sin \angle AQB \quad (\square \textcircled{1})$$

$$(3) \quad AB = 2\sqrt{7}, \quad R_1 = 2\sqrt{2} \text{ を } \textcircled{5} \text{ に代入すると } \frac{2\sqrt{7}}{\sin \angle APB} = 2 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \sin \angle APB = \frac{2\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\text{サシ}14}}{\text{ス}4}$$

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB \text{ から } \angle APB + \angle AQB = 180^\circ$$

$$\angle APB < \angle AQB \text{ より, } \angle APB \text{ は鋭角であるから } \cos \angle APB > 0$$

$$\text{ゆえに } \cos \angle APB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle APB} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\triangle PAB$ において, 余弦定理により

$$AB^2 = PA^2 + PB^2 - 2 \cdot PA \cdot PB \cos \angle APB$$

であり, (1) より, $PB = \sqrt{2}PA$ であるから

$$(2\sqrt{7})^2 = PA^2 + (\sqrt{2}PA)^2 - 2 \cdot PA \cdot \sqrt{2}PA \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{よって } PA^2 = 14$$

$$PA > 0 \text{ であるから } PA = \sqrt{\text{セソ}14}$$

参考 QA の長さは次のように求められる。

$$\sin \angle APB = \sin \angle AQB \text{ から } \sin \angle AQB = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$, $\angle APB < \angle AQB$ より, $\angle AQB$ は鈍角であるから

$$\cos \angle AQB = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$\triangle QAB$ において, 余弦定理により

$$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2 \cdot QA \cdot QB \cos \angle AQB$$

であり, $QB = \sqrt{2}QA$ であるから

$$(2\sqrt{7})^2 = QA^2 + (\sqrt{2}QA)^2 - 2 \cdot QA \cdot \sqrt{2}QA \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\text{よって } QA^2 = 7$$

$$QA > 0 \text{ であるから } QA = \sqrt{7}$$

3

解説

(1) C_1 の y 切片は 1 であるから $c = 1$

また, C_1 は 2 点 $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ を通るから

$$\begin{cases} (-\frac{5}{2})^2 a - \frac{5}{2}b + 1 = 0 \\ (\frac{1}{2})^2 a + \frac{1}{2}b + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} 25a - 10b + 4 = 0 \\ a + 2b + 4 = 0 \end{cases}$$

これを解いて $a = -\frac{4}{5}$, $b = -\frac{8}{5}$

したがって $y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$

別解 C_1 は 2 点 $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ を通るから, C_1 をグラフにもつ 2 次関数は

$y = a(x + \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2})$ とおくこともできる。

$$a(x + \frac{5}{2})(x - \frac{1}{2}) = ax^2 + 2ax - \frac{5}{4}a$$

であり, C_1 の y 切片が 1 であるから $-\frac{5}{4}a = 1$ よって $a = -\frac{4}{5}$

これを代入すると $y = -\frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 1$

C_1 は 2 点 $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ を通るから, C_1 の

頂点の x 座標は $x = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}}{2} = -1$

よって, C_1 の頂点の y 座標は

$$y = -\frac{4}{5}(-1)^2 - \frac{8}{5}(-1) + 1 = \frac{9}{5}$$

ここで, C_1 と C_3 は y 軸に関して対称であるから,

C_3 の頂点の座標は $(1, \frac{9}{5})$

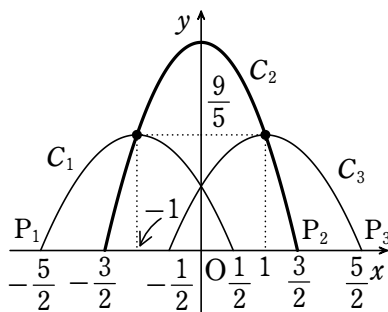
ゆえに, C_2 は 2 点 $(-1, \frac{9}{5})$, $(1, \frac{9}{5})$ を通るから, y 軸に関して対称である。

よって, C_2 は点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通るから, 点 $(-\frac{3}{2}, 0)$ も通り, C_2 をグラフにもつ 2 次関

数を $y = p(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})$ とおくことができる。

C_2 は, 点 $(1, \frac{9}{5})$ を通るから $\frac{9}{5} = p(1 - \frac{3}{2})(1 + \frac{3}{2})$ よって $p = -\frac{36}{25}$

C_2 の頂点の x 座標は 0 であるから, y 座標は $y = -\frac{36}{25}(0 - \frac{3}{2})(0 + \frac{3}{2}) = \frac{81}{25}$



$\frac{81}{25} \div \frac{9}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$ であるから、大きな噴水の高さは、小さな噴水の高さのおよそ2倍である。(〇)

(2) C_2' も2点 $(-1, \frac{9}{5})$, $(1, \frac{9}{5})$ を通るから、 y

軸に関して対称である。

よって、 C_2' の頂点の座標は $(0, 5)$ であるから、 C_2' をグラフにもつ2次関数を $y = qx^2 + 5$ とおくことができる。

C_2' は、点 $(1, \frac{9}{5})$ を通るから $\frac{9}{5} = q \cdot 1^2 + 5$

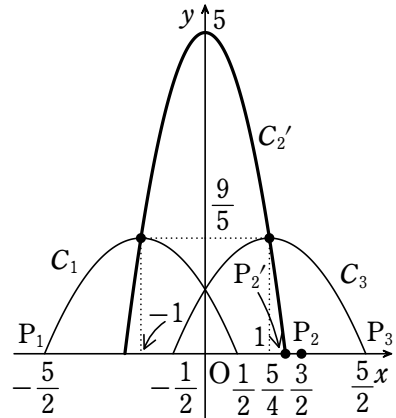
よって $q = -\frac{16}{5}$

C_2' と x 軸の交点の x 座標は $0 = -\frac{16}{5}x^2 + 5$

ゆえに $x = \pm \frac{5}{4}$

よって、 P_2' の x 座標は $\frac{5}{4}$ であるから、 P_2' は P_2 より $\frac{3}{2} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ だけ P_1 の方にあ

る。(〇)



4

解説

(1) (i) (a) 図1より, 正しい。

(b) 図1より, 傾きが10の直線より下にある点の数は1であるから, 正しい。

よって, (a), (b)の正誤の組合せとして正しいものはア④である。

(ii) データの総数は47であるから, 第1四分位数はP12の351, 第3四分位数はP36の1251である。

よって, 四分位範囲は $1251 - 351 = 900$ (イ④)

$351 - 1.5 \cdot 900 = -999$, $1251 + 1.5 \cdot 900 = 2601$ であるから, 令和4年の日本人宿泊者数の外れ値は -999 以下または 2601 以上の値である。よって, 日本人宿泊者数で外れ値となる都道府県は, P45, P46, P47である。

P45, P46, P47はいずれも外国人宿泊者数でも外れ値となっているので, 令和4年の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の両方で外れ値となる都道府県の数はいくつである。

(2) $z_i - \bar{z} = (x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y})$ であるから

$$(z_i - \bar{z})^2 = (x_i - \bar{x})^2 + 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (y_i - \bar{y})^2$$

$$\text{よって } s_z^2 = \frac{1}{47} \{(z_1 - \bar{z})^2 + (z_2 - \bar{z})^2 + \dots + (z_{47} - \bar{z})^2\}$$

$$= \frac{1}{47} \{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{47} - \bar{x})^2$$

$$+ 2(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + 2(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + 2(x_{47} - \bar{x})(y_{47} - \bar{y})$$

$$+ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_{47} - \bar{y})^2\}$$

$$= s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy} \quad (\text{エ④})$$

また, x と y の間には正の相関があるから $s_{xy} > 0$ である。

$$\text{よって } s_z^2 > s_x^2 + s_y^2 \quad (\text{オ④})$$

(3) 35枚の硬貨のうち23枚以上が表となった割合は

$$2.4 + 0.9 + 0.5 + 0.4 + 0.1 = 4.3 \text{ (\%)} \quad (\text{カ③})$$

であり, 5%未満であるから, “「キャンペーンAの方がよい」と回答する割合と

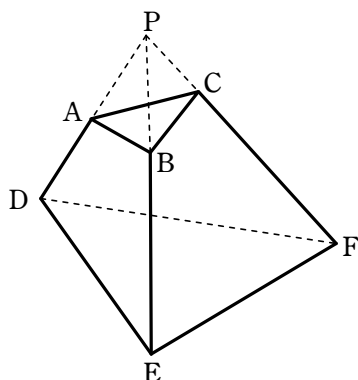
「キャンペーンBの方がよい」と回答する割合は等しい”という仮説は誤っていると判断する。 (ク④)

したがって, 今回のアンケート結果からは, キャンペーンAの方がよいと思っている人が多いといえる。 (ケ④)

5

解説

- (1) 点 P は直線 AD 上にあり、直線 AD は平面 ABED と平面 ACFD との交線であるから、点 P は平面 ACFD 上にあることがわかる。 (ア ②)
 また、点 P は直線 BE 上にあり、直線 BE は平面 ABED と平面 BCFE との交線であるから、点 P は平面 BCFE 上にあることがわかる。 (イ ③)
 平面 ACFD と平面 BCFE との交線は直線 CF であるから、点 P は直線 CF 上にもあることがわかる。
 したがって、3 直線 AD, BE, CF は点 P で交わる。



- (2) (i) 面 ABC は 1 辺の長さが 3 の正三角形であるから $AB = BC = CA = 3$
 平面 ABED と球面 S が交わる部分は円であり、4 点 A, B, E, D はその円周上にある。

よって、右の図のように、四角形 ABED は円に内接するから $\angle PAB = \angle PED$

また $\angle APB = \angle EPD$ (共通)

よって、 $\triangle PAB \sim \triangle PED$ であり、その相似比は

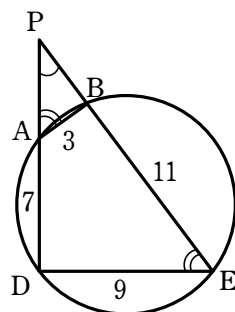
$$AB : ED = 3 : 9 = 1 : 3$$

したがって、 $PA : PE = PB : PD = 1 : 3$ であるから

$$3PA = PE, 3PB = PD$$

すなわち $3PA = PB + 11, 3PB = PA + 7$

これを解くと $PA = 5, PB = 4$



- (ii) 平面 BCFE と球面 S が交わる部分も円であり、4 点 B, C, F, E はその円周上にある。

方べきの定理により $PB \cdot PE = PC \cdot PF$

すなわち $4 \cdot (4 + 11) = PC \cdot (PC + 17)$

よって $PC^2 + 17PC - 60 = 0$

すなわち $(PC + 20)(PC - 3) = 0$

$PC > 0$ であるから $PC = 3$

また、 $\triangle PBC \sim \triangle PFE$ であり

$$BC : FE = PC : PE$$

すなわち $3 : EF = 3 : (4 + 11)$

よって $EF = 15$

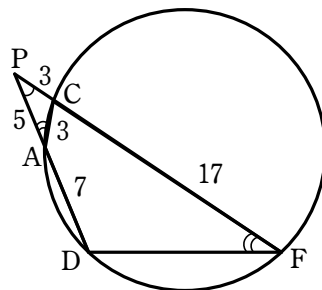
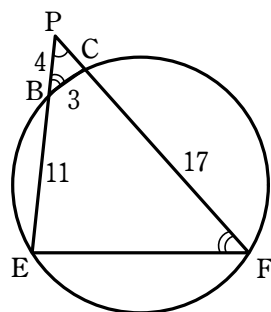
同様に、平面 ACFD と球面 S が交わる部分も円であり、4 点 A, C, F, D はその円周上にある。

このとき、 $\triangle PCA \sim \triangle PDF$ であり

$$CA : DF = PC : PD$$

すなわち $3 : DF = 3 : (5 + 7)$

よって $DF = 12$



(iii) $\triangle PDE$ において,

$$PD^2 + DE^2 = 12^2 + 9^2 = 225, \quad PE^2 = 15^2 = 225$$

であるから $PD^2 + DE^2 = PE^2$

よって $\angle PDE = 90^\circ$

すなわち $\angle ADE = 90^\circ$ …… ①

$\triangle PDF$ において,

$$PD^2 + DF^2 = 12^2 + 12^2 = 288, \quad PF^2 = 20^2 = 400$$

であるから $PD^2 + DF^2 \neq PF^2$

よって $\angle PDF \neq 90^\circ$ すなわち $\angle ADF \neq 90^\circ$ …… ②

$\triangle DEF$ において,

$$DE^2 + DF^2 = 9^2 + 12^2 = 225, \quad EF^2 = 15^2 = 225$$

であるから $DE^2 + DF^2 = EF^2$

よって $\angle EDF = 90^\circ$ …… ③

(a) 平面 $ABED$ と平面 DEF の交線 DE に対して, ①, ③ から

$$AD \perp DE, \quad DF \perp DE$$

一方, ② から, 直線 AD と直線 DF は垂直でない。

よって, 交線 DE と垂直である 2 直線 AD, DF のなす角は直角でない。

ゆえに, 平面 $ABED$ と平面 DEF は垂直でないから 偽

(b) ①, ③ から $AD \perp DE, DF \perp DE$

よって, 直線 DE は平面 $ACFD$ 上の交わる 2 直線 AD, DF と垂直である。

ゆえに, 直線 DE は平面 $ACFD$ に垂直であるから 真

(c) (b) より, 直線 DE は平面 $ACFD$ と垂直である。

よって, 平面 $ACFD$ 上にある直線 AC は直線 DE と垂直であるから 真

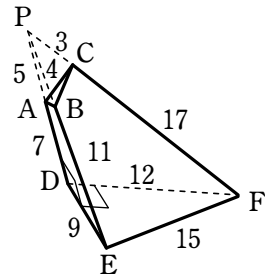
したがって, 命題 (a), (b), (c) の真偽の組合せとして正しいものは ^セ ④

参考 $\angle ADE = 90^\circ, \angle EDF = 90^\circ$ であることは,

$$DE : PD : PE = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5, \quad DE : DF : EF = 9 : 12 : 15 = 3 : 4 : 5$$

であることから判断してもよい。

また, $PD^2 + DF^2 < PF^2$ であるから, $\angle PDF$ すなわち $\angle ADF$ は鈍角である。



6

解説

- (1) 1回目に当たりが出るという事象を A , 1回目に当たりが出ず, かつ2回目に当たりが出るという事象を B , 1回目, 2回目ともに当たりが出ず, かつ3回目に当たりが出るという事象を C とすると $P(A) = \frac{3}{16}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{1}{16}$

また, A, B, C は互いに排反である。

1回目または2回目に当たりが出る確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

1回目, 2回目ともに当たりが出ない確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

1回も当たりが出ない確率は

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- (2) (i) $X=0$ となる, すなわち参加者が景品を受け取らない確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{5}{8}$$

$X=1200$ となる, すなわち参加者が景品を受け取る確率は

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{8}$$

よって, 右のような表ができる。

したがって, 数量 X の期待値は

$$0 \times \frac{5}{8} + 1200 \times \frac{3}{8} = 450$$

X	0	1200	計
確率	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

- (ii) X 円の期待値 450 円は参加料の金額 500 円未満である。したがって, 主催者は参加料 500 円という設定について妥当であると判断する。 (ス 0, セ 0)

- (3) (i) $Y=170$ となる, すなわち 1回目に当たりが出る確率は $P(A) = \frac{3}{16}$

$Y=340$ となる, すなわち 1回目に当たりが出ず, かつ2回目に当たりが出る確率は

$$P(B) = \frac{1}{8}$$

$Y=510$ となる, すなわち 1回目, 2回目ともに当たりが出ない確率は

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{11}{16}$$

よって, 右のような表ができる。

したがって, 数量 Y の期待値は

$$170 \times \frac{3}{16} + 340 \times \frac{1}{8} + 510 \times \frac{11}{16} = 425$$

Y	170	340	510	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

- (ii) X 円の期待値 450 円は, $a=170$ と設定した場合の参加料 Y 円の期待値 425 円以上である。したがって, 主催者はくじ引き料 170 円という設定について妥当ではないと判断する。 (ツ 0, テ 0)

また、くじ引き料が a 円するとき、ゲームを通して参加者が支払うくじ引き料の合計 Y は、右のような表になる。

Y	a	$2a$	$3a$	計
確率	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{16}$	1

よって、数量 Y の期待値は

$$a \times \frac{3}{16} + 2a \times \frac{1}{8} + 3a \times \frac{11}{16} = \frac{5}{2}a$$

したがって、くじ引き料の設定が妥当であると判断するのは

$$450 < \frac{5}{2}a \quad \text{すなわち} \quad a > \text{トナニ}180$$

のときである。