$\boxed{1}$

真分数を分母の小さい順に，分母が同じ場合には分子の小さい順に並べてできる数列

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，…… を $\{a_n\}$ とする。真分数とは，分子と分母がともに自然数で，分子が分母より小さい分数のことであり，上の数列では，約分できる形の分数も含めて並べている。以下の問題に分数形で解答する場合は，解答上の注意にあるように，それ以上約分できない形で答えよ。

(1)　$a_{15}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。また，分母に初めて 8 が現れる項は，$a_{\boxed{ウエ}}$ である。

(2)　k を 2 以上の自然数とする。

数列 $\{a_n\}$ において，$\dfrac{1}{k}$ が初めて現れる項を第 M_k 項とし，$\dfrac{k-1}{k}$ が初めて現れる項を第N_k 項とすると

$$M_k=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}k^2-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}k+\boxed{ケ},\ \ N_k=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}k^2-\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}k$$

である。

よって，$a_{104}=\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}$ である。

(3)　k を 2 以上の自然数とする。

数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項までの和は，$\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}k-\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ である。

したがって，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 N_k 項までの和は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}k^2-\dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}k$ である。

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{103}a_n=\frac{\boxed{ハヒフ}}{\boxed{ヘホ}}$ である。

$\boxed{2}$

四面体 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ であるとする。また，辺 OA 上に点 P をとり，辺 BC 上に点 Q をとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ であるような実数 s，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{イ}}$ であることから

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\left(\boxed{\text{ウ}}s-\boxed{\text{エ}}\right)^2+\left(\boxed{\text{オ}}t-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\boxed{\text{キ}}$ となる。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ が最小となるのは $s=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ のときであり，このとき $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ となる。

(2)　三角形 ABC の重心を G とする。$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ のとき，三角形 GPQ の面積を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\boxed{\text{ス}}$ から，$\angle\mathrm{APQ}=\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。

したがって，三角形 APQ の面積は $\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

また $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であり，点 G は線分 AQ を $\boxed{\text{ナ}}:1$ に内分する点である。

以上のことから，三角形 GPQ の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

3

n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は，1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ここで，$0<p<1$ である。n 回移動した後の点 A の座標を X とし，n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする。

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1) $p=\dfrac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 X のとり得る値は，小さい順に $-\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{ウ}$ であり，これらの値をとる確率は，それぞれ $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{オ}}$，$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2) n 回移動したとき，X と Y の間に $X=\boxed{ク}n+\boxed{ケ}Y$ の関係が成り立つ。

確率変数 Y の平均（期待値）は $\boxed{コ}$，分散は $\boxed{サ}$ なので，X の平均は $\boxed{シ}$，分散は $\boxed{ス}$ である。$\boxed{コ}$ ～ $\boxed{ス}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⓑ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ np	① $np(1-p)$	② $\dfrac{p(1-p)}{n}$
③ $2np$	④ $2np(1-p)$	⑤ $p(1-p)$
⑥ $4np$	⑦ $4np(1-p)$	⑧ $16np(1-p)$
⑨ $4np-n$	ⓐ $4np(1-p)-n$	ⓑ $16np(1-p)-n$

(3) $p=\dfrac{1}{4}$ のとき，1200 回移動した後の点 A の座標 X が 120 以上になる確率の近似値を求めよう。

(2) により，Y の平均は $\boxed{セソタ}$，標準偏差は $\boxed{チツ}$ であり，求める確率は次のようになる。

$$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-\boxed{セソタ}}{\boxed{チツ}}\geqq \boxed{テ}.\boxed{トナ}\right)$$

いま，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，$n=1200$ は十分に大きいので，求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる。

$$P\left(Z\geqq \boxed{テ}.\boxed{トナ}\right)=0.\boxed{ニヌネ}$$

(4) p の値がわからないとする。2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ のとき，p に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。

n 回移動したときに Y がとる値を y とし，$r=\dfrac{y}{n}$ とおくと，n が十分に大きいならば，

確率変数 $R=\dfrac{Y}{n}$ は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。

$n=2400$ は十分に大きいので，このことを利用し，分散を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，求める信頼区間は $0.\boxed{\text{ノハヒ}} \leqq p \leqq 0.\boxed{\text{フヘホ}}$ となる。

$\boxed{4}$

a は1より小さい正の定数とする．xy 平面の第1象限に，原点 O からの距離が a の点 P をとる．点 P を中心に半径1の円を描き，x 軸との交点を A, C，y 軸との交点を B, D とする．ただし，点 A の x 座標，点 B の y 座標はともに正とする．$\angle \mathrm{POA}=\theta$ とおくとき

(1) 四角形 ABCD の面積 S を a と θ で表せ.

(2) θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲を動くとき，S の最大値および S が最大となるときの θ の値を求めよ.