$\boxed{1}$

解説

(1)　直線 $2x+3y=6$ と x 軸との交点 A は　　A$(^{ア}3,\ 0)$

y 軸との交点 B は　　B$(0,\ ^{イ}2)$

2 直線 $2x+y=6$ …… ① と $mx-y=-2$ …… ② の交点 C について，①＋② より

$(2+m)x=4$　　　$2+m \neq 0$ であるから　　$x=\dfrac{4}{m+2}$

これを ① に代入すると　　$2\cdot\dfrac{4}{m+2}+y=6$

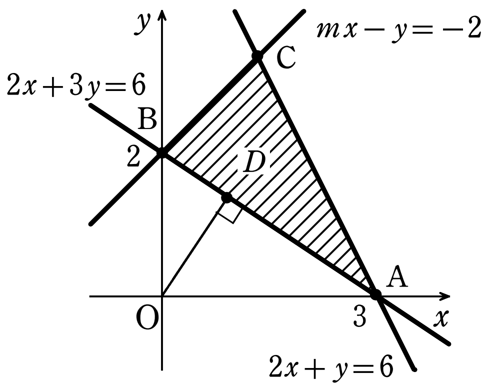
よって　　$y=6-\dfrac{8}{m+2}=\dfrac{6m+4}{m+2}$

ゆえに，交点 C は　　$C\left(\dfrac{^{ウ}4}{m+{}^{エ}2},\ \dfrac{^{オ}6m+{}^{カ}4}{m+2}\right)$

(2)　直線 $mx-y=-2$，$2x+3y=6$ の傾きは

それぞれ　　$m,\ -\dfrac{2}{3}$

$m>-\dfrac{2}{3}$ であるから，領域 D は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



k は原点 O$(0,\ 0)$ と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗に等しい。

図より，k が最小になる点は，原点 O から直線 $2x+3y=6$ に下ろした垂線と直線 $2x+3y=6$ との交点である。

すなわち，k が最小になる点は，線分 AB 上にある。　$(^{キ}$ ②$)$

線分 AB 上の点は，直線 $2x+3y=6$ 上の点でもあるから，x 座標を $3t$ とおくと

$(3t,\ ^{クケ}-2t+{}^{コ}2)$

ただし，$0\leqq 3t\leqq 3$　すなわち　$^{サ}0\leqq t\leqq {}^{シ}1$ である。

よって　　$k=(3t)^2+(-2t+2)^2=9t^2+4t^2-8t+4$

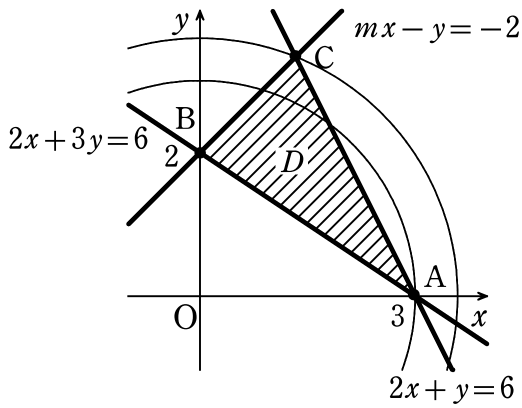
$={}^{スセ}13t^2-{}^{ソ}8t+{}^{タ}4=13\left(t-\dfrac{4}{13}\right)^2+\dfrac{36}{13}$

$0\leqq t\leqq 1$ より，k は $t=\dfrac{4}{13}$ のとき最小値 $\dfrac{36}{13}$ をとる。

$t=\dfrac{4}{13}$ のとき，点 $(x,\ y)$ は　　$\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{18}{13}\right)$

すなわち，k は点 $\left(\dfrac{{}^{\text{チツ}}12}{13},\ \dfrac{{}^{\text{テト}}18}{13}\right)$ で最小値 $\dfrac{{}^{\text{ナニ}}36}{13}$ をとる。

(3)　$\mathrm{OB}^2<\mathrm{OA}^2$ であるから，k が点 C で最大値をとるとき　　$\mathrm{OC}^2 \geqq \mathrm{OA}^2$



ゆえに　　$k \geqq {}^{\text{ヌ}}9$

点 C において

$$k=\left(\frac{4}{m+2}\right)^2+\left(\frac{6m+4}{m+2}\right)^2$$

$$=\frac{4^2+(6m+4)^2}{(m+2)^2}=\frac{36m^2+48m+32}{(m+2)^2}$$

$$=\frac{4({}^{\text{ネ}}9m^2+{}^{\text{ノハ}}12m+{}^{\text{ヒ}}8)}{(m+2)^2}$$

$k \geqq 9$ より　　$\dfrac{4(9m^2+12m+8)}{(m+2)^2} \geqq 9$

$(m+2)^2>0$ であるから　　$4(9m^2+12m+8) \geqq 9(m+2)^2$

整理すると　　$(3m+2)(9m-2) \geqq 0$

$m>-\dfrac{2}{3}$ より　　$m \geqq \dfrac{{}^{\text{フ}}2}{{}^{\text{ヘ}}9}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$t=x^2+4x$ の両辺を 2 乗すると　　$t^2=(x^2+4x)^2=x^4+8x^3+16x^2$

$t=x^2+4x$ とおくと，与えられた 4 次方程式は

$$(x^4+8x^3+16x^2)+4(x^2+4x)-12=0$$

よって　　$t^2+{}^{ア}4t-12=0$

左辺を因数分解すると　　$(t+6)(t-2)=0$

よって　　$(x^2+4x+{}^{イ}6)(x^2+4x-{}^{ウ}2)=0$

$x^2+4x+6=0$ を解くと　　$x=-2\pm\sqrt{-2}={}^{エオ}-2\pm\sqrt{{}^{カ}2}\,i$

$x^2+4x-2=0$ を解くと　　$x=-2\pm\sqrt{{}^{キ}6}$

(2)　$\alpha=-1+\sqrt{5}\,i$，$\beta=-1-\sqrt{5}\,i$ について

$$\alpha+\beta=(-1+\sqrt{5}\,i)+(-1-\sqrt{5}\,i)=-2$$

$$\alpha\beta=(-1+\sqrt{5}\,i)(-1-\sqrt{5}\,i)=(-1)^2-(\sqrt{5}\,i)^2=6$$

α，β を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$　　　　すなわち　　$x^2+{}^{ク}2x+{}^{ケ}6=0$

$\alpha^2+2\alpha+6=0$ を満たすから　　$\alpha^2=-2\alpha-6$

よって　　$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=(-2\alpha-6)\cdot\alpha=-2\alpha^2-6\alpha=-2(-2\alpha-6)-6\alpha$

$$={}^{コサ}-2\alpha+{}^{シス}12$$

$$\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=(-2\alpha+12)\cdot\alpha=-2\alpha^2+12\alpha=-2(-2\alpha-6)+12\alpha$$

$$={}^{セソ}16\alpha+{}^{タチ}12$$

β も同様にして，$\beta^3=-2\alpha+12$，$\beta^4=16\beta+12$ が成り立つ。

よって　　$\alpha^4+\beta^4=(16\alpha+12)+(16\beta+12)=16(\alpha+\beta)+24=16\cdot(-2)+24={}^{ツテ}-8$

$\alpha^2=-2\alpha-6$ の両辺を α で割ると　　$\alpha=-2-\dfrac{6}{\alpha}$

よって　　$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{{}^{トナ}-1}{{}^{ニ}6}\alpha-\dfrac{{}^{ヌ}1}{{}^{ネ}3}$

この両辺を α で割ると　　$\dfrac{1}{\alpha^2}=-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3\alpha}=-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{6}\alpha-\dfrac{1}{3}\right)$

$$=\frac{{}^{ノ}1}{{}^{ハヒ}18}\alpha-\frac{{}^{フ}1}{{}^{ヘホ}18}$$

別解　(ツテ)

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2\alpha^2\beta^2=\{(-2)^2-2\cdot6\}^2-2\cdot6^2$$

$$=(-8)^2-72={}^{ツテ}-8$$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　W は二項分布 $B\left(4,\ \dfrac{3}{5}\right)$ に従うから

　　W の平均 (期待値) $E(W)$ は　　$E(W)=4\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{{}^{\text{アイ}}12}{{}^{\text{ウ}}5}$

　　W の分散 $V(W)$ は　　$V(W)=4\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(1-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{{}^{\text{エオ}}24}{{}^{\text{カキ}}25}$

$X=$(白球の出る回数)$-$(赤球の出る回数) とすると

$$X=W-(4-W)={}^{\text{ク}}2W-{}^{\text{ケ}}4$$

よって，X の平均 $E(X)$ は　　$E(X)=E(2W-4)=2E(W)-4=2\cdot\dfrac{12}{5}-4=\dfrac{{}^{\text{コ}}4}{{}^{\text{サ}}5}$

　　X の分散 $V(X)$ は　　$V(X)=V(2W-4)=2^2V(W)=4\cdot\dfrac{24}{25}=\dfrac{{}^{\text{シス}}96}{{}^{\text{セソ}}25}$

(2)　袋の中に白球が $\dfrac{3}{5}$，赤球が $1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$ の割合で，全部で 10 個入っているから，袋の中には白球が 6 個，赤球が 4 個入っている。

このとき，Y のとりうる値は 0，1，2，3，4 である。

よって　　$P(Y=0)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{{}^{\text{タ}}1}{{}^{\text{チツテ}}210}$

$$P(Y=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{6\times4}{210}=\frac{{}^{\text{ト}}4}{{}^{\text{ナニ}}35}$$

$$P(Y=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{15\times6}{210}=\frac{3}{7}$$

$$P(Y=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{20\times4}{210}=\frac{8}{21}$$

$$P(Y=4)=\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$$

Y	0	1	2	3	4
$P(Y)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{14}$

ゆえに，Y の確率分布は右の表のようになる。

したがって，Y の平均 $E(Y)$ は

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{210}+1\cdot\frac{4}{35}+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{8}{21}+4\cdot\frac{1}{14}$$

$$=\frac{0+24+180+240+60}{210}=\frac{504}{210}=\frac{{}^{\text{ヌネ}}12}{{}^{\text{ノ}}5}$$

(3)　母比率 p に対する信頼度 (信頼係数) 95 % の信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\leqq p\leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

よって，信頼区間の幅は　　$r+1.96\sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}-\left(r-1.96\sqrt{\dfrac{r(1-r)}{n}}\right)$

$$=2\times1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

ここで　　$r(1-r)=-r^2+r=-\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$

よって，$r(1-r)$ は $r=\dfrac{1}{2}=0.5$ のとき最大となる。

$r(1-r)$ が最大となるとき，信頼区間の幅も最大となるから，信頼区間の幅は $r=0.^{ハ}5$ のとき最大となる。

このときの信頼区間の幅 L_1 は　　$L_1=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.5(1-0.5)}{n}}=\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$

$r=0.8$ のときの信頼区間の幅 L_2 は　　$L_2=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.8(1-0.8)}{n}}=2\times\sqrt{0.8\times0.2}\,L_1$

$$=2\times0.4\times L_1=0.8L_1$$

よって　　$\dfrac{L_2}{L_1}={}^{ヒ}0.^{フ}8$

$\boxed{4}$

(解説)

2の倍数でも3の倍数でもないということは，6で割って1または5余るということであるから，数列は $\{a_n\}$：1，5，7，11，13，17，19，……

よって，奇数番目には1余る数が，偶数番目には5余る数が小さい順に並ぶ.

これらはどちらも公差6の等差数列であるから

$$a_{2n-1}=1+6(n-1)=6n-5 \cdots\cdots ①$$

$$a_{2n}=5+6(n-1)=6n-1 \cdots\cdots ②$$

(1)　$1003=6\times167+1=6\times168-5$　　よって，①から　$n=168$

ゆえに　$1003=a_{168\times2-1}=a_{335}$ すなわち　第335項

(2)　②から　$a_{2000}=a_{2\times1000}=6\times1000-1=5999$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2m}a_n&=(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_{2m-1})+(a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2m})\\&=\sum_{n=1}^{m}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{m}a_{2n}\\&=\sum_{n=1}^{m}(a_{2n-1}+a_{2n})\\&=\sum_{n=1}^{m}(12n-6)\\&=12\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-6m\\&=6m^2\end{aligned}$$