$\boxed{1}$

(解説)

(1)　与えられた連立不等式から

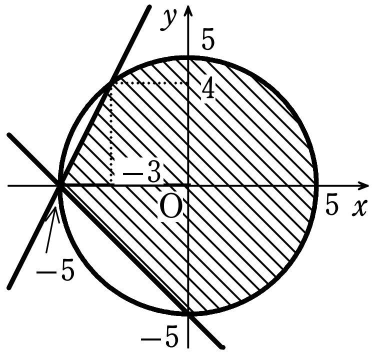
$$A\begin{cases}x^2+y^2\leqq 25\\ y\geqq 2x+10\\ y\leqq -x-5\end{cases}\quad \text{または}\quad B\begin{cases}x^2+y^2\leqq 25\\ y\leqq 2x+10\\ y\geqq -x-5\end{cases}$$

求める領域は，A の表す領域と B の表す領域の和集合である。境界線の交点の座標は

$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=2x+10\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0),\ (-3,\ 4)$

$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ y=-x-5\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0),\ (0,\ -5)$

$\begin{cases}y=2x+10\\ y=-x-5\end{cases}$ を解いて　$(x,\ y)=(-5,\ 0)$



したがって，求める領域は，図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。

(2)　$x+2y=k$ ……① とおくと，① は，

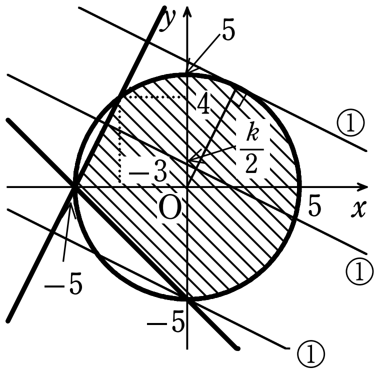
　傾き $-\dfrac{1}{2}$，y 切片 $\dfrac{k}{2}$

の直線を表す。

この直線が (1) の領域と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

k が最大となるのは，図から，直線 ① が第 1 象限で円 $x^2+y^2=25$ と接するときである。

直線 ① に垂直で円の中心 $(0,\ 0)$ を通る直線の方程式は $y=2x$ であるから，これと $x^2+y^2=25$ を連立して



$$x^2+(2x)^2=25 \qquad \text{ゆえに} \qquad x=\pm\sqrt{5}$$

第 1 象限で接するから　$x=\sqrt{5}$　　よって，接点の座標は　$(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$

また，k の値が最小となるのは，境界線 $y=-x-5$ の傾きは -1 で $-1<-\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 ① が点 $(0,\ -5)$ を通るときである。

したがって，$x+2y$ は

　$(x,\ y)=(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$ のとき最大値　$M=\sqrt{5}+2\cdot 2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$；

　$(x,\ y)=(0,\ -5)$ のとき最小値　$m=0+2\cdot(-5)=-10$

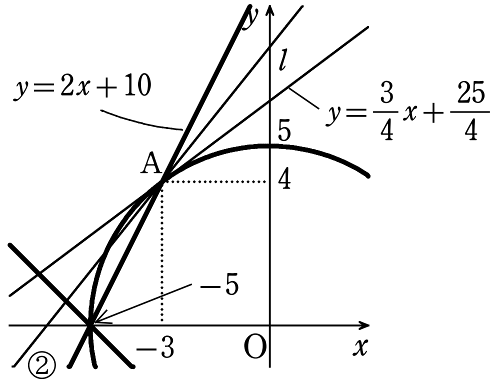
をとる。

(3)　$ax+y=l$ ……② とおくと，② は，

傾き $-a$，y切片 l の直線を表す。

A $(-3,\ 4)$ とする。

l が点 A で最大となるとき，直線 ② は点 A における円の接線と直線 $y=2x+10$ の間（一致する場合も含む）にある。



点 A における円 $x^2+y^2=25$ の接線の方程式は　　　$-3x+4y=25$

すなわち　　$y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$

直線 ② が点 A における円の接線と一致するとき

$$-a=\frac{3}{4}\quad すなわち \quad a=-\frac{3}{4}$$

また，直線 ② が直線 $y=2x+10$ と一致するとき

$$-a=2\quad すなわち \quad a=-2$$

したがって，求める a の範囲は　　$-2\leqq a\leqq -\frac{3}{4}$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$f(x)=g(x)$ とすると　　$\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{2\log x}{x^2}$

分母を払って整理すると　　$(x-2)\log x=0$

これを解くと　　$x=1$，2　　　　これらは，$x>0$ を満たす。

よって，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標は　　$(1,\ 0)$，$\left(2,\ \dfrac{1}{2}\log 2\right)$

(2)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ から　　$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=e$

よって，$x>0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

ゆえに，$f(x)$ は $x=e$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

また，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$ から　　$g'(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\cdot x^2-(2\log x)\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{2(1-2\log x)}{x^3}$

$g'(x)=0$ とすると　　$x=\sqrt{e}$

よって，$x>0$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

ゆえに，$g(x)$ は $x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{e}$ をとる。

ここで　　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)=-\infty$，

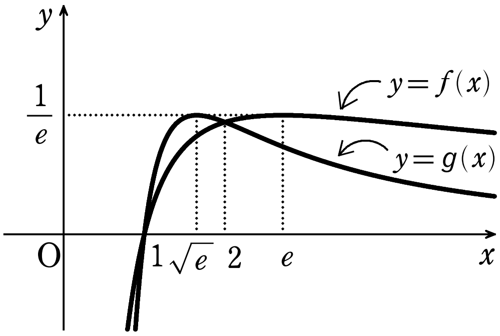
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2}{x^2} = 0$$

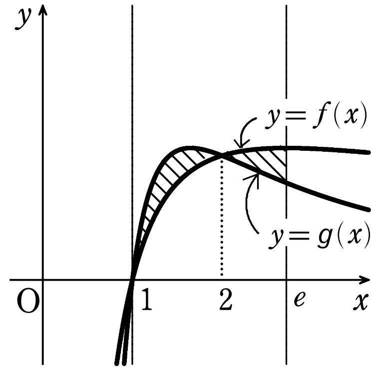
また，$e = 2.718\cdots\cdots$ であるから

$$1 < \sqrt{e} < 2 < e$$

以上から，$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。



(3)　求める面積を S とすると，S は右の図の斜線部分の面積である。



よって

$$S = \int_1^2 \{g(x) - f(x)\}dx + \int_2^e \{f(x) - g(x)\}dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{2\log x}{x^2} - \frac{\log x}{x}\right)dx - \int_2^e \left(\frac{2\log x}{x^2} - \frac{\log x}{x}\right)dx$$

ここで　$\displaystyle\int \frac{2\log x}{x^2}dx = \int \left(-\frac{2}{x}\right)' \log x\, dx$

$$= -\frac{2}{x}\log x - \int \left(-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$= -\frac{2(\log x + 1)}{x} + C,$$

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \log x \cdot (\log x)' dx$$

$$= \frac{(\log x)^2}{2} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

よって　$\displaystyle S = \left[-\frac{2(\log x + 1)}{x} - \frac{(\log x)^2}{2}\right]_1^2 - \left[-\frac{2(\log x + 1)}{x} - \frac{(\log x)^2}{2}\right]_2^e$

$$= -2\left\{(\log 2 + 1) + \frac{(\log 2)^2}{2}\right\} + 2 + \frac{2(\log e + 1)}{e} + \frac{(\log e)^2}{2}$$

$$= -2\log 2 - (\log 2)^2 + \frac{4}{e} + \frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$

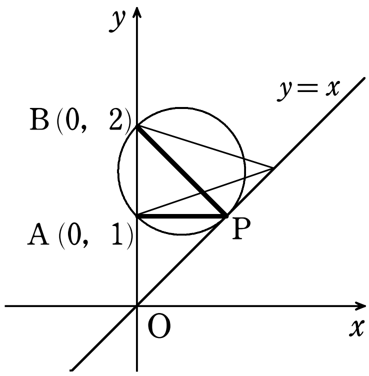
(解説)

点 P は直線 $y=x$ 上の点である。

点 A，B を通り，直線 $y=x$ に接する円を考えると，

点 P がこの円と直線 $y=x$ の接点となるとき，

$\angle$APB は最大となる (その他の点は，円外の点になるから)。



このとき，方べきの定理により　　$OA \cdot OB = OP^2$

ゆえに　　$1 \cdot 2 = OP^2$

$OP > 0$ であるから　　$OP = \sqrt{2}$

よって，点 P の座標は (1，1) となり，このとき，

$\angle APB = 45°$ となる。

$\boxed{4}$

(解説)

1 個のボールにつき，箱に入れる方法は $2n$ 通りあるから，n 個のボールを $2n$ 個の箱に入れる方法は　　$(2n)^n$ 通り

どの箱にも 1 個以下のボールしか入らない場合の数は，異なる $2n$ 個のものから n 個を取り出して並べる順列の総数に等しいから　　${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通り

よって

$$p_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n}=\frac{2n(2n-1)\cdots\cdots(n+1)}{2^n n^n}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)}{2^n n^n}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}{2^n}$$

ゆえに

$$\log p_n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)-\log 2^n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-n\log 2$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log 2\right\}=\int_0^1\log(1+x)\,dx-\log 2$$

$$=\int_0^1(1+x)'\log(1+x)\,dx-\log 2$$

$$=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx-\log 2=\log 2-1$$