

1

a が実数で $\frac{2+3i}{a+i}$ が純虚数であるとき、 a の値を求めよ。

2

多項式 x^{2017} を多項式 x^2+x で割ったときの余りを求めよ。

3

3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-7=0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

1

【解答】 $a = -\frac{3}{2}$

2

【解答】 x

3

【解答】 (1) -2 (2) -19 (3) 11

1

【解説】

$$\frac{2+3i}{a+i} = \frac{(2+3i)(a-i)}{(a+i)(a-i)} = \frac{2a-2i+3ai-3i^2}{a^2+1} = \frac{(2a+3)+(3a-2)i}{a^2+1}$$

よって、 $\frac{2+3i}{a+i}$ が純虚数であるとき $2a+3=0$ かつ $3a-2 \neq 0$

すなわち $a = -\frac{3}{2}$ かつ $a \neq \frac{2}{3}$

したがって $a = -\frac{3}{2}$

2

【解説】

x^{2017} を x^2+x すなわち $x(x+1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを $ax+b$ とすると、次の等式が成り立つ。

$$x^{2017} = x(x+1)Q(x) + ax + b$$

$x=0$ を代入すると $0=b$ …… ①

$x=-1$ を代入すると $-1=-a+b$ …… ②

①, ② より $a=1, b=0$

したがって、求める余りは x

3

【解説】

3 次方程式の解と係数の関係から $\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = 7$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 2^2 - 2 \cdot 3 = -2$

(2) $\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma)$
 $= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$
 $= 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 = -19$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$ から
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)) + 3\alpha\beta\gamma$
 $= 2 \cdot (-2 - 3) + 3 \cdot 7 = 11$

【別解】 α, β, γ は、3 次方程式 $x^3 - 2x^2 + 3x - 7 = 0$ の解であるから

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 3\alpha - 7 = 0,$$

$$\beta^3 - 2\beta^2 + 3\beta - 7 = 0,$$

$$\gamma^3 - 2\gamma^2 + 3\gamma - 7 = 0$$

よって $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (2\alpha^2 - 3\alpha + 7) + (2\beta^2 - 3\beta + 7) + (2\gamma^2 - 3\gamma + 7)$
 $= 2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3(\alpha + \beta + \gamma) + 3 \cdot 7$
 $= 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 + 21 = 11$