第７章

～　整数　～

第１講　約数と倍数・最大公約数・最小公倍数

１　約数と倍数

1　約数と倍数

2つの整数 a，b について，ある整数 k を用いて，$a=bk$ と表されるとき，b を a の約数，a を b の 倍数 という。

2　倍数の判定法

2の倍数 …… 一の位が偶数 (0，2，4，6，8のいずれか)

5の倍数 …… 一の位が0，5のいずれか　　4の倍数 …… 下2桁が4の倍数

3の倍数 …… 各位の数の和が3の倍数　　9の倍数 …… 各位の数の和が9の倍数

3　素因数分解

１　素　数　2以上の自然数で，正の約数が1とその数自身のみである数

合成数　2以上の自然数で，素数でない数

因　数　整数がいくつかの整数の積で表されるとき，そのそれぞれの整数

素因数　素数である因数

素因数分解　自然数を素数だけの積の形に表すこと

２　約数の個数

自然数 N の素因数分解が $N=p^a\cdot q^b\cdot r^c\cdot\cdots\cdots$ となるとき，N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdot\cdots\cdots$ である。

２　最大公約数・最小公倍数

1　最大公約数・最小公倍数

１　公約数　2つ以上の整数に共通する約数

最大公約数　公約数のうち最大のもの

公倍数　2つ以上の整数に共通する倍数

最小公倍数　正の公倍数のうち最小のもの

２　公約数は最大公約数の約数，公倍数は最小公倍数の倍数である。

2　最大公約数・最小公倍数の性質

2つの自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とする。

$a=ga'$，$b=gb'$ であるとき，次のことが成り立つ。

１　a'，b' は互いに素である自然数　　２　$l=ga'b'$　　３　$ab=gl$

第１講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

(1)　4 桁の自然数 42□5 が 3 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(2)　4 桁の自然数 835□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(3)　5 桁の自然数 6□7□4 の □ に，それぞれ適当な数を入れると，3 の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

(4)　5 桁の自然数 76□8□ の □ に，それぞれ適当な数を入れると，9 の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

$\boxed{2}$★★☆

$\sqrt{\dfrac{756}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$★★☆

(1)　360 の正の約数の個数を求めよ。

(2)　45 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ。

(3)　200 以下の自然数のうち，正の約数が 10 個である数の個数を求めよ。

$\boxed{4}$★☆☆

次の数の組の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(1)　168，252　　　(2)　84，126，630

$\boxed{5}$★★☆

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 90

(2)　最大公約数が 18，最小公倍数が 540

$\boxed{6}$★★☆

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 280，最大公約数が 14　　　(2)　積が 700，最大公約数が 5

(3)　和が 168，最小公倍数が 1001　　　(4)　積が 300，最小公倍数が 60

第１講　例題演習

$\boxed{1}$

(1)　4 桁の自然数 58□7 が 3 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(2)　4 桁の自然数 257□ が 4 の倍数であるとき，□ に入る数をすべて求めよ。

(3)　5 桁の自然数 7□4□5 の □ に，それぞれ適当な数を入れると，3 の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

(4)　5 桁の自然数 43□8□ の □ に，それぞれ適当な数を入れると，9 の倍数になる。
このような自然数で最大のものを求めよ。

$\boxed{2}$

$\sqrt{\dfrac{2352}{n}}$ が自然数になるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$

(1)　次の数の正の約数の個数を求めよ。

①　196　　　②　936　　　③　3150

(2)　20 の倍数で，正の約数の個数が 15 個である自然数 n をすべて求めよ。

(3)　300 以下の自然数のうち，正の約数が 9 個である数の個数を求めよ。

$\boxed{4}$

次の 2 つの整数，3 つの整数の最大公約数と最小公倍数をそれぞれ求めよ。

(1)　168，378　　　(2)　65，156，234

$\boxed{5}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　最大公約数が 5，最小公倍数が 75　　　(2)　最大公約数が 20，最小公倍数が 160

$\boxed{6}$

次のような条件を満たす 2 つの自然数 a，b の組をすべて求めよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　和が 320，最大公約数が 16　　　(2)　積が 720，最大公約数が 6

(3)　和が 140，最小公倍数が 935　　　(4)　積が 735，最小公倍数が 105

第１講　レベルＡ

$\boxed{1}$

n は自然数で，$\dfrac{n}{36}$，$\dfrac{n}{45}$ がともに自然数となるという。このような n のうちで最も小さいものを求めよ。

$\boxed{2}$

$\sqrt{\dfrac{500}{77n}}$ が有理数となるような最小の自然数 n の値を求めよ。

$\boxed{3}$

次の条件を満たす自然数 n を，それぞれすべて求めよ。

(1)　n と 16 の最小公倍数が 144 である。

(2)　n と 12 と 50 の最小公倍数が 1500 である。

第１講　レベルＢ

1 ［専修大］

次の３条件を満たす３個の整数 a, b, c $(0<a<b<c)$ の値を求めよ．

(A)　a, b, c の最大公約数は６

(B)　b と c の最大公約数は 24，最小公倍数は 144

(C)　a と b の最小公倍数は 240

2

(1)　$N=1000a+100b+10c+d$ （a，b，c，d は０以上９以下の整数）とする。N が 11 で割り切れるための必要十分条件は，$(b+d)-(a+c)$ が 11 の倍数であることを証明せよ。

(2)　９桁の自然数 N を３桁ずつ３つの数に分けたとき，左から１番目と３番目の数の和から，２番目の数を引いた数が７の倍数のとき，N は７の倍数であることを $10^6-1=7\times142857$ を利用して証明せよ。

３　整数の割り算と商・余り

$\boxed{1}$ 割り算における商と余り

整数 a と正の整数 b について，$a=bq+r$，$0\leqq r<b$ となる整数 q，r は１通りに定まる。q を，a を b で割ったときの **商**，r を **余り** という。$r=0$ のとき，a は b で **割り切れる** といい，$r\neq 0$ のとき，a は b で **割り切れない** という。

$\boxed{2}$ 余りによる整数の分類

すべての整数は，次のように分類できる。ただし，k は整数，m は正の整数である。

1　2で割ったときの余りで分類 $\longrightarrow$ $2k$，$2k+1$　(偶数と奇数)

2　3で割ったときの余りで分類 $\longrightarrow$ $3k$，$3k+1$，$3k+2$

3　m で割ったときの余りで分類 $\longrightarrow$ mk，$mk+1$，……，$mk+(m-1)$

整数についての事柄 (とくに倍数や余りに関する性質) を証明するときは，整数をある正の整数で割ったときの余りで分類すると示しやすいことがある。

$\boxed{3}$ 連続する整数の積の性質

1　連続する２つの整数の積は２の倍数 (偶数) である。

2　連続する３つの整数の積は６の倍数 (２の倍数かつ３の倍数) である。

$\boxed{\text{研究}}$ 和，差，積の余り

以下では，m，k は正の整数，a，b は整数とする。

$\boxed{1}$ 割り算の余りの性質

a，b を m で割った余りを，それぞれ r，r' とする。

1　$a+b$ を m で割った余りは，$r+r'$ を m で割った余りに等しい。

2　$a-b$ を m で割った余りは，$r-r'$ を m で割った余りに等しい。

3　ab を m で割った余りは，rr' を m で割った余りに等しい。

4　a^k を m で割った余りは，r^k を m で割った余りに等しい。

４　合同式

以下では，m，k は正の整数，a，b，c，d は整数とする。

$\boxed{1}$ 合同式

1．$a-b$ が m の倍数であるとき，a と b は m を **法** として **合同** であるといい，式で $a\equiv b \pmod{m}$ と表す。このような式を **合同式** という。$a\equiv b \pmod{m}$ は，a を m で割った余りと b を m で割った余りが等しいことと同じである。

2．合同式について，次のことが成り立つ。

[1]　$a\equiv a \pmod{m}$　　[2]　$a\equiv b \pmod{m}$ のとき　$b\equiv a \pmod{m}$

[3]　$a\equiv b \pmod{m}$，$b\equiv c \pmod{m}$ のとき　$a\equiv c \pmod{m}$

$a\equiv c \pmod{m}$，$b\equiv d \pmod{m}$ のとき

1　$a+b\equiv c+d \pmod{m}$　　2　$a-b\equiv c-d \pmod{m}$

3　$ab\equiv cd \pmod{m}$　　4　$a^k\equiv c^k \pmod{m}$

第２講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

a，b は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 7 の倍数ならば，$4a+5b$ は 7 の倍数である。

(2)　$a+2$ は 5 の倍数であり，$a+3$ は 7 の倍数であるとき，$a+17$ は 35 の倍数である。

$\boxed{2}$★★☆

n は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^2+5n+4 は偶数である。　　(2)　n^2+1 は 3 の倍数でない。

$\boxed{3}$★★☆

n は整数とする。次の整数は 6 の倍数であることを証明せよ。

(1)　n^3-n　　(2)　n^3+9n^2+8n　　(3)　$2n^3+3n^2+n$

$\boxed{4}$★★☆

n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 8 で割った余りが 3 であるとき，n^2+2n+5 を 8 で割った余り

(2)　n を 17 で割った余りが 15 であるとき，$3n^2+5n+9$ を 17 で割った余り

(3)　n を 35 で割った余りが 2 であるとき，n^4+3n^3+4 を 35 で割った余り

$\boxed{5}$★★☆

合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　37^{100} を 6 で割った余り　　(2)　5^{80} を 8 で割った余り

(3)　3^{100} を 13 で割った余り　　(4)　4^{200} を 9 で割った余り

(5)　123^{122} の一の位　　(6)　7^{251} の下 2 桁

$\boxed{6}$★★★

n は自然数とする。合同式を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　n^5+n^2+2 は 3 の倍数でない。

(2)　$5^{n+1}+6^{2n-1}$ は 31 の倍数である。

第２講　例題演習

$\boxed{1}$

a，b，n は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　a，b が 7 の倍数ならば，$a+3b$ は 7 の倍数である。

(2)　$n+1$ は 6 の倍数であり，$n+4$ は 9 の倍数であるとき，$n+13$ は 18 の倍数である。

$\boxed{2}$

n は整数とする。次のことを証明せよ。

(1)　n^4+2n^2 は 3 の倍数である。　　(2)　n^2+n+1 は 5 で割り切れない。

(3)　n^2 を 7 で割ったときの余りは，0 か 1 か 2 か 4 である。

$\boxed{3}$

n は整数とする。次の整数は 6 の倍数であることを証明せよ。

(1)　n^3+5n　　(2)　$2n^3+4n$　　(3)　n^3-3n^2-4n

(4)　$2n^3-3n^2+n$　　(5)　$2n^3+3n^2-5n$

$\boxed{4}$

n は整数とする。合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　n を 5 で割った余りが 2 であるとき，n^6 を 5 で割った余り

(2)　n を 7 で割った余りが 3 であるとき，$2n^2+5n+8$ を 7 で割った余り

$\boxed{5}$

合同式を用いて，次のものを求めよ。

(1)　26^{100} を 5 で割った余り　　(2)　7^{60} を 8 で割った余り

(3)　4^{100} を 7 で割った余り　　(4)　3^{200} を 13 で割った余り

(5)　23^{23} の一の位　　(6)　7^{50} の下 2 桁

$\boxed{6}$

n は自然数とする。合同式を用いて，次のことを証明せよ。

(1)　n^2+n+1 は 5 の倍数でない

(2)　$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数

(3)　$4^{n+1}+5^{2n-1}$ は 21 の倍数

第２講　レベルＡ

$\boxed{1}$

n は整数とする。次のことを証明せよ。

n^2 を 7 で割ったときの余りは，0 か 1 か 2 か 4 である。

$\boxed{2}$

連続する 3 つの奇数の 2 乗の和に 1 を加えた数 N は，12 の倍数であるが，24 の倍数ではないことを証明せよ。

$\boxed{3}$［東邦大］

m，n を 1 より大きい異なる整数とするとき，m^3n-mn^3 は 6 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{4}$［お茶の水女子大］

a，b，$a-b$ がどれも 3 で割り切れないとき，a^3+b^3 は 9 で割り切れることを証明せよ。ただし，a，b は整数とする。

第２講　レベルＢ

$\boxed{1}$

(1)　n は整数とし，$N=2n^3+4n$ とする。n が偶数のとき N は 24 で割り切れ，n が奇数のとき N は 4 で割り切れないことを示せ。

(2)　自然数 P が 2 でも 3 でも割り切れないとき，P^2-1 が 24 で割り切れることを証明せよ。

$\boxed{2}$［京都大］

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。

$\boxed{3}$

整数 a，b，c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき，a，b のうち少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ。

$\boxed{4}$［一橋大］

(1)　n が自然数のとき，n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2)　n が自然数のとき，n^6+1 は 3 で割り切れないことを証明せよ。

５　**ユークリッドの互除法**　　　６　**１次不定方程式**

1　割り算と最大公約数

自然数 a，b について，a を b で割ったときの余りを r とすると，次の定理が成り立つ。

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

2　ユークリッドの互除法

2 つの自然数 a，b の最大公約数 g を求めるには，次の手順を繰り返せばよい。

①　a を b で割った余りを r とする。

②　$r=0$ ならば，b が最大公約数 g である。

　$r\neq 0$ ならば，a を b で，b を r でおき換えて ① に戻る。

この手順を繰り返すと必ず $r=0$ になるから，そのときの割る数が g である。

3　互いに素である整数の性質

2 つの整数 a，b が互いに素であるとき，整数 c について $ax+by=c$ を満たす整数 x，y が存在する。

4　１次不定方程式と整数解

１　a，b，c は整数の定数で，$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。x，y の 1 次方程式 $ax+by=c$ を成り立たせる整数 x，y の組を，この方程式の **整数解** という。また，この方程式の整数解を求めることを **1 次不定方程式** を解くという。

２　2 つの整数 a，b は互いに素であるとする。

1 次不定方程式 $ax+by=0$ のすべての整数解は　$x=bk$，$y=-ak$ (k は整数)

1 次不定方程式 $ax+by=c$ のすべての整数解は，$ax+by=1$ の整数解の 1 つを $x=p$，$y=q$ とすると　$x=bk+cp$，$y=-ak+cq$ (k は整数)

第３講　例題

$\boxed{1}$ ★☆☆

次の２つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

①　961，217　　　　②　833，646

$\boxed{2}$ ★★☆

$7n+3$ と $2n+3$ の最大公約数が５になるような 50 以下の自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ ★★☆

次の等式を満たす整数 x，y の組を１つ求めよ。

(1)　$24x+7y=1$　　(2)　$29x+42y=1$　　(3)　$62x-23y=3$

$\boxed{4}$ ★★☆

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$33x+14y=1$　　(2)　$29x+42y=5$

$\boxed{5}$ ★★☆

12 で割ると１余り，７で割ると４余る３桁の自然数のうち最大の数を求めよ。

$\boxed{6}$ ★☆☆

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$2x+5y=29$　　(2)　$3x+4y=56$　　(3)　$x+5y+2z=15$

$\boxed{7}$ ★★☆

次の方程式の解をすべて求めよ。(1)(2)については整数解，(3)(4)については自然数解として求めよ。

(1)　$xy-3x+6y-23=0$　　(2)　$3xy+3x+y=5$

(3)　$x^2-y^2=21$　　(4)　$4x^2-y^2=32$

$\boxed{8}$ ★★★

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$xyz=x+y+z$ $(x\leqq y\leqq z)$　　(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$ $(x\leqq y\leqq z)$

$\boxed{9}$ ★★★

次の方程式を満たす整数 x，y を求めよ。

(1)　$3x^2+4xy-4y^2+4x-16y-28=0$　　(2)　$5x^2+2xy+y^2-12x+4y+11=0$

第３講　例題演習

1

次の２つの整数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

① 408，119　② 322，155　③ 923，377

④ 498，223　⑤ 629，259

2

次の条件を満たす自然数 n をすべて求めよ。

① $11n+28$ と $4n+7$ の最大公約数が５になるような50以下の自然数 n

② $5n+1$ と $6n+4$ の最大公約数が７になるような100以下の自然数 n

3

次の等式を満たす整数 x，y の組を１つ求めよ。

(1) $24x+19y=1$　(2) $36x+25y=1$　(3) $184x-67y=2$

4

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1) $30x+17y=2$　(2) $29x+42y=5$　(3) $46x-35y=4$

5

(1) ５で割ると２余り，14で割ると５余るような自然数のうち，３桁で最大のものと最小のものを求めよ。

(2) ３で割ると１余り，７で割ると３余るような自然数のうち，３桁で最大のものと最小のものを求めよ。

6

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1) $7x+2y=41$　(2) $4x+5y=100$　(3) $4x+2y+z=15$

7

次の方程式の解をすべて求めよ。(1)～(2)については整数解，(3)～(5)については自然数解として求めよ。

(1) $xy-5x-y=0$　(2) $xy-2x+5y-4=0$　(3) $2xy+6x+y=116$

(4) $x^2-y^2=35$　(5) $x^2-4y^2=21$

$\boxed{8}$

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

(1)　$x+3y+4z=2xyz$　$(x \leqq y \leqq z)$

(2)　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$　$(x \leqq y \leqq z)$

(3)　$2xy+2yz+2zx=xyz$　$(4 \leqq x < y < z)$

$\boxed{9}$

次の方程式を満たす整数 x，y を求めよ。

(1)　$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$

第３講　レベルＡ

$\boxed{1}$

n は自然数とする。$\sqrt{n^2+56}$ が自然数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{2}$

7 で割ると 2 余り，9 で割ると 7 余る自然数 n を，63 で割ったときの余りを求めよ。

$\boxed{3}$

n は自然数とする。n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{4}$ [早稲田大]

(1)　整数 x，y は $x^2+y^2 \leqq 50$ の範囲にあるとする。このとき，方程式 $3x-4y+25=0$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　整数 a，b が $2a+3b=42$ を満たすとき，ab の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$

x，y，z を正の整数とする。次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} x+y+z=19 \\ x+5y+10z=95 \end{cases}$$

$\boxed{6}$ [群馬大]

$2 \leqq p < q < r$ を満たす整数 p，q，r の組で，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r} \geqq 1$ となるものをすべて求めよ。

第３講　レベルＢ

$\boxed{1}$

3 で割ると 2 余り，5 で割ると 1 余り，11 で割ると 5 余る自然数 n のうちで，1000 を超えない最大のものを求めよ。

$\boxed{2}$

x，y についての 1 次不定方程式 $9x+11y=n$ がちょうど 10 個の負でない整数解をもつような自然数 n の中で最小のものを求めよ。

$\boxed{3}$ [名古屋大]

x，y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。

第４講　n進法，互いに素な整数

7　n 進法

1　n 進法

１　各位の数字を上の位から並べて数を表す方法を **位取り記数法** といい，位取りの基礎となる数を **底** という。n を 2 以上の自然数とするとき，底を n として数を表す方法を **n 進法** といい，n 進法で表された数を **n 進数** という。ただし，n 進数の各位の数字は，0，1，……，$n-1$ である。

２　n 進数は右下に $_{(n)}$ をつけて表す。たとえば，2 進数 10011 は $10011_{(2)}$ と書く。10 進数では，$_{(10)}$ を省略する。

2　底の変換

10 進数を n 進数で表すには，次の手順による。

①　割る数を n として割り算を行い，商と余りを求める。

②　得られた商について同様の割り算を繰り返し，商が 0 になるまで行う。

③　得られた余りを逆順に並べる。

3　n 進法の小数

n 進法の小数では，小数点以下の位は $\dfrac{1}{n^1}$ の位，$\dfrac{1}{n^2}$ の位，$\dfrac{1}{n^3}$ の位，…… である。

n 進法の小数 (1 未満) を 10 進法の小数で表すには，次の手順による。

①　n を掛けて得られる整数部分を取り出す。

②　小数部分の数に対して n を掛ける。

③　② で得られた積について ① と ② を繰り返し，② の積が整数になるまで行う。

④　① で得られた整数部分を順に並べる。

4　2 進法の四則計算

2 進法の足し算，引き算，掛け算では，次の計算が基本である。

足し算　$0_{(2)}+0_{(2)}=0_{(2)}$，　$0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}$，　$1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}$，　$1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$

引き算　$0_{(2)}-0_{(2)}=0_{(2)}$，　$1_{(2)}-0_{(2)}=1_{(2)}$，　$1_{(2)}-1_{(2)}=0_{(2)}$，　$10_{(2)}-1_{(2)}=1_{(2)}$

掛け算　$0_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$，　$0_{(2)}\times 1_{(2)}=0_{(2)}$，　$1_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}$，　$1_{(2)}\times 1_{(2)}=1_{(2)}$

割り算は，10 進法の割り算と同様に，掛け算と引き算を組み合わせて行う。

8　互いに素な整数

2 つの整数 a，b の最大公約数が 1 であるとき，a，b は **互いに素** であるという。

a，b，c は整数で，a，b が互いに素であるとき，次のことが成り立つ。

①　ac が b の倍数であるとき，c は b の倍数である。

②　a の倍数であり，b の倍数でもある整数は，ab の倍数である。

第４講　例題

$\boxed{1}$★☆☆

(1)　(ア)　2 進数 $101101_{(2)}$ と 3 進数 $12022_{(3)}$ を，それぞれ 10 進法で表せ。

(イ)　10 進数 41 を，2 進法と 5 進法で表せ。

(2)　(ア)　2 進数 $11.101_{(2)}$ を 10 進法の小数で表せ。

(イ)　10 進数 0.3125 を，2 進法で表せ。

$\boxed{2}$★★☆

次の計算をせよ。

(1)　$212_{(3)}+121_{(3)}$　　(2)　$3412_{(5)}+2344_{(5)}$　　(3)　$543_{(6)}-225_{(6)}$

(4)　$6241_{(7)}-1426_{(7)}$　　(5)　$3112_{(4)}\times 33_{(4)}$　　(6)　$3434_{(5)}\div 23_{(5)}$

$\boxed{3}$★★☆

(1)　3 桁の自然数 N を 7 進法で表すと $a0b_{(7)}$ となり，5 進法で表すと，逆の並びの $b0a_{(5)}$ となるという。a，b を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

(2)　自然数 N を 5 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 3 桁の数 $abc_{(5)}$，$cab_{(7)}$ になるという。a，b，c を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

$\boxed{4}$★★☆

(1)　1 から 150 までの自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 150$ について，N を素因数分解したときの素因数 3 の個数を求めよ。

(2)　1 から 600 までの自然数の積 $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot 600$ を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{5}$★★☆

n は自然数とする。$n^2-14n+40$ が素数となるような n をすべて求めよ。

$\boxed{6}$★★★

(1)　a，b は互いに素である自然数であるとき，$a-2b$ と b は互いに素であることを証明せよ。

(2)　n を自然数とするとき，$2n-1$ と $2n+1$ は互いに素であることを証明せよ。

第４講　例題演習

$\boxed{1}$

(1)　(ア)　2 進数 $1100101_{(2)}$ と 3 進数 $201021_{(3)}$ を，それぞれ 10 進法で表せ。

(イ)　10 進数 28 を，2 進法と 3 進法で表せ。

(2)　(ア)　5 進数 $14.312_{(5)}$ を 10 進法の小数で表せ。

(イ)　10 進数 0.248 を，5 進法で表せ。

$\boxed{2}$

次の計算をせよ。

(1)　$201_{(3)}+122_{(3)}$　(2)　$1044_{(5)}+2104_{(5)}$　(3)　$6354_{(7)}+3246_{(7)}$

(4)　$453_{(6)}-124_{(6)}$　(5)　$7654_{(8)}-5765_{(8)}$　(6)　$42031_{(5)}-3412_{(5)}$

(7)　$573_{(8)}\times 11_{(8)}$　(8)　$3012_{(4)}\times 13_{(4)}$　(9)　$1032_{(5)}\times 24_{(5)}$

(10)　$1163_{(7)}\div 25_{(7)}$　(11)　$3041_{(5)}\div 21_{(5)}$　(12)　$43021_{(5)}\div 101_{(5)}$

$\boxed{3}$

(1)　自然数 N を 2 進法で表すと 5 桁の数 $10a11_{(2)}$ となり，5 進法で表すと 2 桁の数 $3b_{(5)}$ となるとき，a，b の値を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

(2)　自然数 N を 8 進法と 7 進法で表すと，それぞれ 3 桁の数 $abc_{(8)}$ と $cba_{(7)}$ になるという。a，b，c の値を求めよ。また，N を 10 進法で表せ。

$\boxed{4}$

(1)　20! を計算した結果は，2 で何回割り切れるか。

(2)　25! を計算すると，末尾には 0 が連続して何個並ぶか。

$\boxed{5}$

n は自然数とする。次の式の値が素数となる n の値をすべて求めよ。

(1)　$n^2-28n+160$　(2)　$n^2-22n+40$

$\boxed{6}$

(1)　a，b は互いに素である自然数であるとき，$a+2b$ と b は互いに素であることを証明せよ。

(2)　n を自然数とするとき，$4n-1$ と $4n+1$ は互いに素であることを証明せよ。

(3)　a，k を自然数とする。このとき，a と $ka+1$ は互いに素であることを証明せよ。

第４講　レベルＡ

$\boxed{1}$

次の掛け算，割り算をせよ。

(1)　$10111_{(2)} \times 1011_{(2)}$　　　(2)　$11000011_{(2)} \div 1101_{(2)}$

$\boxed{2}$

5 進法で表したとき，4 桁となるような数の個数を 10 進数で答えよ。

$\boxed{3}$

8 進法で表すと 3 桁になる整数を，2 進法で表すと何桁の数になるか。考えられる桁数をすべて求めよ。

$\boxed{4}$

10 進数の 145 を n 進法で表すと $221_{(n)}$ となるような 3 以上の自然数 n を求めよ。

$\boxed{5}$

16 進数は 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，A，B，C，D，E，F の計 16 個の数字と文字を用いて表され，A から F はそれぞれ 10 進数の 10 から 15 を表す。

(1)　16 進数 $120_{(16)}$，$B8_{(16)}$ をそれぞれ 10 進数で表せ。

(2)　2 進数 $10111011_{(2)}$，8 進数 $6324_{(8)}$ をそれぞれ 16 進数で表せ。

$\boxed{6}$［東京理科大］

次の自然数 m，n の値を 10 進法で求めよ。

(1)　30! を 10 進法で表すと，一の位から数えて $(m+1)$ 番目 (10^m の位) に初めて 0 でない数字が現れる。すなわち，末尾に連続 m 個の 0 が続いている。

(2)　20! を 2 進法で表すと，一の位から数えて $(n+1)$ 番目 (2^n の位) に初めて 1 が現れる。すなわち，末尾に連続 n 個の 0 が続いている。

$\boxed{7}$

a，b が互いに素な自然数であるとき，$\dfrac{2a+3b}{3a+4b}$ は既約分数であることを，背理法を用いて証明せよ。

第４講　レベルＢ

$\boxed{1}$［愛知教育大］

p 進法で表された整数 M_p の各位の数字の和を m_p で表すとき，次のことを示せ。ただし，p は $2 \leqq p \leqq 10$ を満たす整数とする。

(1)　M_{10} と m_{10} をそれぞれ 9 で割ったときの余りは一致する。また，３で割っても同様である。

(2)　M_p が偶数である条件は，p が偶数のときは M_p の一の位の数字が偶数であることであり，p が奇数のときには m_p が偶数であることである。

$\boxed{2}$［宮崎大］

n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ。

$\boxed{3}$［神戸大］

自然数 n について，以下の問いに答えよ。

(1)　恒等式 $(n^2+1)-(n+2)(n-2)=5$ を利用して，$n+2$ と n^2+1 の公約数は 1 または 5 に限ることを示せ。

(2)　(1) を用いて，$n+2$ と n^2+1 が 1 以外に公約数をもつような自然数 n をすべて求めよ。

(3)　(1)，(2) を参考にして，$2n+1$ と n^2+1 が 1 以外に公約数をもつような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{4}$［大阪工業大］

0 以上の整数 n に対して $f(n)$ は次を満たすものとする。

$$f(0)=0, \qquad f(n)=\begin{cases} f\left(\dfrac{n}{2}\right) & (n\text{ が偶数のとき}) \\ f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)+1 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

(1)　0 以上の整数 k に対して $f(2^k)$，$f(2^k-1)$ を求めよ。

(2)　69 を 2 進法で表すと ${}^{ア}\boxed{}$ となり，$f(69)={}^{イ}\boxed{}$ である。

(3)　$f(n)=3$ となる n を小さいものから順に 4 つ求めよ。

(4)　$2^{2004} \leqq n \leqq 2^{2005}-1$ とするとき，$f(n)=4$ となる n のうち 3 番目に大きいものを求め，$n=a\times 2^b$ の形で表せ。