6月24日(水)　高２理系数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　】　　点/10点

**1** [岡山大]

座標平面において線分 $L : y=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$，曲線 $C : y=x^2-x+1$ $(0\leqq x\leqq 1)$ および $y$ 軸で囲まれた図形を $D$ とする。

(1)　$C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から $L$ に下ろした垂線と $L$ の交点を Q とする。線分 OQ の長さ $u$ を $t$ で表せ。ただし O は原点とする。

(2)　(1) の P，Q について線分 PQ の長さを $t$ を用いて表せ。

(3)　図形 $D$ を直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1) $\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{10}\pi$

解説

(1)　点 P を通り，傾きが $-1$ である直線の方程式は

$$y-(t^2-t+1)=-(x-t)$$

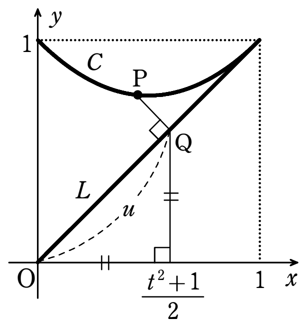
すなわち　$y=-x+t^2+1$

この直線と直線 $y=x$ との交点が点 Q であるから，

Q の $x$ 座標は，方程式 $x=-x+t^2+1$ を解いて

$$x=\frac{t^2+1}{2}$$

したがって　$u=\sqrt{2}\cdot\dfrac{t^2+1}{2}=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$




(2)　線分 PQ の長さは，点 P と直線 $y=x$ との距離に等しいから

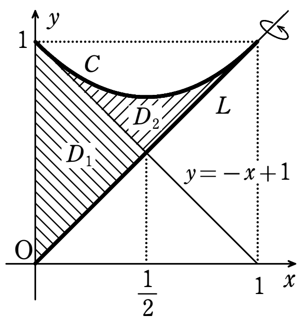
$$\mathrm{PQ}=\frac{|t-(t^2-t+1)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^2+2t-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|-(t-1)^2|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-1)^2}{\sqrt{2}}$$

(3)　右の図のように，図形 $D$ を直線 $y=-x+1$ で 2 つの図形 $D_1$，$D_2$ に分ける。

$D_1$，$D_2$ を直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を，それぞれ $V_1$，$V_2$ とすると

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$V_2=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}^2du=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\frac{(t-1)^4}{2}du$$




ここで，$u=\dfrac{t^2+1}{\sqrt{2}}$ より　$du=\sqrt{2}\,tdt$

| $u$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\to$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $t$ | $0$ | $\to$ | $1$ |

よって

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^1\frac{(t-1)^4}{2}\cdot\sqrt{2}\,tdt\\&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\int_0^1(t-1)^4\{(t-1)+1\}dt\\&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\int_0^1\{(t-1)^5+(t-1)^4\}dt\\&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\left[\frac{(t-1)^6}{6}+\frac{(t-1)^5}{5}\right]_0^1=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi\end{aligned}$$

したがって　$V=V_1+V_2=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\pi$

**2** [岡山理科大]

曲線 $y=\dfrac{x^2}{4}-\log\sqrt{x}$　$(1\leqq x\leqq e)$ の長さ $L$ を求めよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

解答　$\dfrac{1}{4}(e^2+1)$

解説

$y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\log x$ であるから　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

よって

$$\begin{aligned}L&=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}dx\\&=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{4}\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)}dx=\frac{1}{2}\int_1^e\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}dx\\&=\frac{1}{2}\int_1^e\left|x+\frac{1}{x}\right|dx\end{aligned}$$

$1\leqq x\leqq e$ において，$x+\dfrac{1}{x}\geqq 0$ であるから

$$L=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}+\log|x|\right]_1^e=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

6月24日(水)　高２理系数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　】　　　　　　　　　　　　　　　　点/10点

$\boxed{1}$ ［岡山大］

座標平面において線分 $L: y=x\ (0 \leqq x \leqq 1)$，曲線 $C: y=x^2-x+1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ および $y$ 軸で囲まれた図形を $D$ とする。

(1)　$C$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から $L$ に下ろした垂線と $L$ の交点を Q とする。線分 OQ の長さ $u$ を $t$ で表せ。ただし O は原点とする。

(2)　(1) の P，Q について線分 PQ の長さを $t$ を用いて表せ。

(3)　図形 $D$ を直線 $y=x$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{2}$ ［岡山理科大］

曲線 $y=\dfrac{x^2}{4}-\log\sqrt{x}\ \ (1 \leqq x \leqq e)$ の長さ $L$ を求めよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。