

1

(解説)

(1) [1] 0 を含まないとき

2 種類の数字の選び方は  ${}_9C_2 = 36$  (通り)また, 2 種類の数字を必ず含むから  $36 \times (2^4 - 2) = 504$  (個)

[2] 0 を含むとき

千の位は, 0 以外の 9 通り. 残りの 3 桁は, 千の位の数に 3 つ続く場合を除くから

$$9 \times (2^3 - 1) = 63 \text{ (個)}$$

[1], [2] から  $504 + 63 = 567$  (個)

(2) [1] 0 を含まないとき

(1) と同様に考えて  ${}_9C_2 \times (2^n - 2) = 36 \times (2^n - 2)$  個

[2] 0 を含むとき

(1) と同様に考えて  $9 \times (2^{n-1} - 1)$  個[1], [2] から  $36 \times (2^n - 2) + 9 \times (2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$  個

(別解) (1) 千の位は, 1 ~ 9 の 9 通り

百, 十, 一の位には, 千の位の数を含めた 2 種類の数字が並ぶ.

たとえば, 千の位が 1 のとき, 百, 十, 一の位に並ぶ数字の組は

(1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9)

の 9 通りある.

そのおのおのについて, すべて 1 が並ぶ場合を除くから  $9(2^3 - 1)$  通りよって  $9 \times 9(2^3 - 1) = 567$  (個)(2) (1) と同様に考えて  $9 \times 9(2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$  個

2

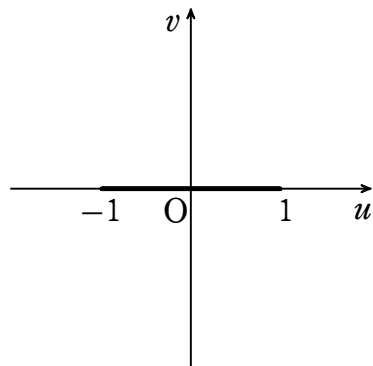
(解説)

(1)  $|z| = 1$  から  $z\overline{z} = 1$  ゆえに  $\frac{1}{z} = \overline{z}$ よって,  $w = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$  は  $z$  の実部である.したがって  $v = 0$  かつ  $-1 \leq u \leq 1$ 

よって, グラフは右図のようになる.

(2)  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  ( $r > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) とおける.

ゆえに



$$w = \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha) \right\}$$

$$\text{よって } u = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha, \quad v = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha$$

$r > 0, \cos \alpha > 0$  であるから

$$u \geq \sqrt{r \cdot \frac{1}{r}} \cos \alpha = \cos \alpha$$

$r - \frac{1}{r}$  は連続で,  $\lim_{r \rightarrow \infty} v = \infty, \lim_{r \rightarrow +0} v = -\infty$

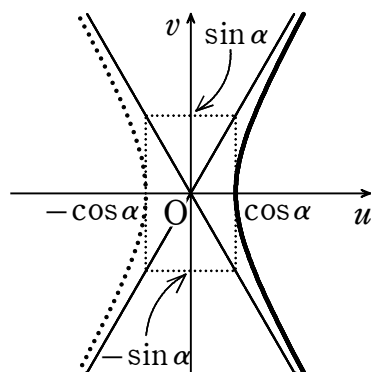
から,  $v$  はすべての実数値をとる.

$$\text{また } r + \frac{1}{r} = \frac{2u}{\cos \alpha}, \quad r - \frac{1}{r} = \frac{2v}{\sin \alpha}$$

$$\text{から } \frac{4u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{4v^2}{\sin^2 \alpha} = 4$$

$$\text{したがって } \frac{u^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{v^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \text{ かつ } u \geq \cos \alpha$$

よって, グラフは右図のようになる.



3

解説

方程式  $f(x) = 0$  の整数解の 1 つを  $x = n$  とすると

$$n(n^3 + an^2 + bn + c) = -1$$

$a, b, c, n$  はすべて整数であるから  $n = \pm 1$

[1]  $f(x) = 0$  が  $x = 1$  を重解にもつとき  $f(x) = (x-1)^2(x^2 + px + 1)$  と表される.

$$\text{よって } f(x) = x^4 + (p-2)x^3 - 2(p-1)x^2 + (p-2)x + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに,  $a, b, c$  は整数であるから  $p$  は整数.

また  $x^2 + px + 1 = 0$  は虚数解をもつ.

よって  $D = p^2 - 4 < 0$  かつ  $p$  は整数.

ゆえに  $p = \pm 1, 0$

① から,  $p = 1$  のとき  $a = c = -1, b = 0$

$p = 0$  のとき  $a = c = -2, b = 2$

$p = -1$  のとき  $a = c = -3, b = 4$

[2]  $f(x) = 0$  が  $x = \pm 1$  を解にもつとき  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + qx - 1)$  と表される.

このとき,  $x^2 + qx - 1 = 0$  は虚数解をもたない.

よって, 不適.

[3]  $f(x) = 0$  が  $x = -1$  を重解にもつとき  $f(x) = (x+1)^2(x^2 + rx + 1)$  と表される.

$$\text{よって } f(x) = x^4 + (r+2)x^3 + 2(r+1)x^2 + (r+2)x + 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

[1]と同様にして  $r = \pm 1, 0$

②から  $r=1$  のとき  $a=c=3, b=4$

$r=0$  のとき  $a=b=c=2$

$r=-1$  のとき  $a=c=1, b=0$

以上から  $(a, b, c) = (-1, 0, -1), (-2, 2, -2), (-3, 4, -3), (3, 4, 3),$   
 $(2, 2, 2), (1, 0, 1)$

4

解説

$$(1) \quad f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 極方程式  $r = \theta$  ( $\theta \geq 0$ ) から

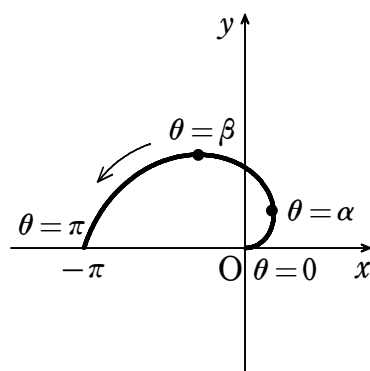
$$x = r \cos \theta = \theta \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = \theta \sin \theta$$

$$\text{ここで } \frac{dx}{d\theta} = \cos \theta - \theta \sin \theta = -\sin \theta \left( \theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta = \cos \theta (\theta + \tan \theta)$$

よって,  $\theta$  についての  $x, y$  の増減表は次のようになる.

| $\theta$ | 0 | ... | $\alpha$ | ... | $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ | ... | $\beta$ | ... | $\pi$ |
|----------|---|-----|----------|-----|------------------------------|-----|---------|-----|-------|
| $x'$     |   | +   | 0        | -   | -                            | -   | -       | -   |       |
| $y'$     |   | +   | +        | +   | +                            | +   | 0       | -   |       |
| $x$      |   | ↗   | 極大       | ↘   | ↘                            | ↘   | ↘       | ↘   |       |
| $y$      |   | ↗   | ↗        | ↗   | ↗                            | ↗   | 極大      | ↘   |       |



$$\text{ただし } \cos \alpha - \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\sin \beta + \beta \cos \beta = 0$$

ゆえに, 曲線は右図のようになる.

したがって, 曲線  $r = \theta$  の  $0 \leq \theta \leq \pi$  の部分の長さを  $L$  とすると

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$= \left[ \theta \sqrt{1 + \theta^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\theta^2}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta$$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} - \int_0^\pi \frac{1 + \theta^2 - 1}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta$$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} - L + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}$$

$$\text{よつて} \quad 2L = \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \theta^2}}$$

$$(1) \text{ より } \quad 2L = \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \left[ \log(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_0^\pi$$

$$= \pi \sqrt{1 + \pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})$$

$$\text{ゆゑに} \quad L = \frac{\pi \sqrt{1 + \pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1 + \pi^2})}{2}$$