【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材①

中２甲陽数学

【注意事項】

本教材は

数学Ｙ「図形と計量」の後半

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

△ABC において，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$A=30°$ のとき，c，B，C を求めよ。

$\boxed{2}$

△ABC において，$\dfrac{\sin A}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\sin C$ が成り立つとき

(1)　△ABC の内角のうち，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　△ABC の内角のうち，2 番目に大きい角の正接を求めよ。

$\boxed{3}$

△ABC において，$\sin C=\cos B\sin A$ が成り立つとき，△ABC はどのような形をしているか。

$\boxed{4}$

(1)　1 辺の長さが 1 の正八角形の面積を求めよ。

(2)　△ABC において，AB=8，AC=5，∠A=120° とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$\boxed{5}$

円 O に内接する四角形 ABCD において，

AB=3，BC=1，CD=3，DA=4

とするとき，次のものを求めよ。

(1)　A　(2)　対角線 BD の長さ　(3)　四角形 ABCD の面積

(4)　円 O の半径　(5)　△ABDの内接円の半径

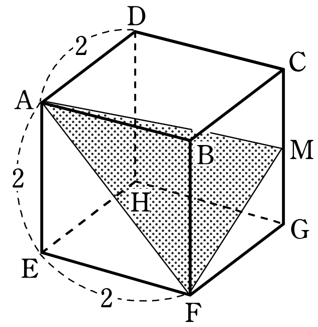
$\boxed{6}$

右の図の立方体 ABCD−EFGH において，辺 CG の中点を M とする。次のものを求めよ。

(1)　AF，AM，FM の長さ

(2)　∠FAM の大きさ

(3)　△AFM の面積



$\boxed{7}$

AB＝AC＝AD＝$\sqrt{21}$，BC＝CD＝DB＝6 である三角錐 ABCD において，頂点 A から △BCD に垂線 AH を下ろす。このとき，次のものを求めよ。

(1)　AH の長さ　(2)　この三角錐の体積

(3)　この三角錐の表面積　(4)　この三角錐に内接する球の体積

$\boxed{8}$

△ABC において，辺 BC を 1：2 に分ける点を D とする。$a=6$，$b=5$，$c=7$ のとき，AD の長さを求めよ。

【解答＆解説】

$\boxed{1}$

解答　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$ または $c=\sqrt{3}-1$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$

$\boxed{2}$

解答　(1)　150°　　(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

$\boxed{3}$

解答　$A=90^\circ$ の直角三角形

$\boxed{4}$

解答　(1)　$2(1+\sqrt{2})$　　(2)　$\dfrac{40}{13}$

$\boxed{5}$

解答　(1)　$A=60^\circ$　　(2)　$\mathrm{BD}=\sqrt{13}$　　(3)　$\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$　　(4)　$\dfrac{\sqrt{39}}{3}$　(5)　$\dfrac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$

$\boxed{6}$

解答　(1)　$\mathrm{AF}=2\sqrt{2}$，$\mathrm{AM}=3$，$\mathrm{FM}=\sqrt{5}$　　(2)　45°　　(3)　3

$\boxed{7}$

解答　(1)　3　　(2)　$9\sqrt{3}$　　(3)　$27\sqrt{3}$　　(4)　$\dfrac{4}{3}\pi$

$\boxed{8}$

解答　$\mathrm{AD}=\sqrt{33}$

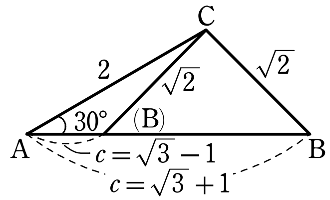
$\boxed{1}$

解説

余弦定理により　$(\sqrt{2})^2=2^2+c^2-2\cdot 2c\cos 30^\circ$

よって　$c^2-2\sqrt{3}\,c+2=0$　　したがって　$c=\sqrt{3}\pm 1$

[1]　$c=\sqrt{3}+1$ のとき



$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=45^\circ$

よって　$C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

[2]　$c=\sqrt{3}-1$ のとき

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ゆえに　$B=135^\circ$　　よって　$C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$

以上から　$c=\sqrt{3}+1$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$

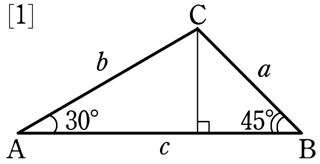
または　$c=\sqrt{3}-1$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$

別解　正弦定理から　$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$　　ゆえに　$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$A=30^\circ$ より，$0^\circ<B<150^\circ$ であるから　$B=45^\circ$，135°

[1]　$B=45^\circ$ のとき

[1]



$C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

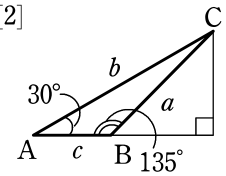
$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30^\circ+\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$=\sqrt{3}+1$

[2]　$B=135^\circ$ のとき

[2]



$C=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=15^\circ$

$c=b\cos A+a\cos B$

$=2\cos 30^\circ+\sqrt{2}\cos 135^\circ$

$=\sqrt{3}-1$

$\boxed{2}$

解説

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ から　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

条件から　$\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

よって　$a : b : c = \sqrt{7} : \sqrt{3} : 1$

ゆえに，$a = \sqrt{7}\,k$，$b = \sqrt{3}\,k$，$c = k$ $(k > 0)$ とおける。

よって，a が最大の辺であるから，$\angle\mathrm{A}$ が最大の角である。

余弦定理により　$\cos A = \dfrac{(\sqrt{3}\,k)^2 + k^2 - (\sqrt{7}\,k)^2}{2 \cdot \sqrt{3}\,k \cdot k} = \dfrac{-3k^2}{2\sqrt{3}\,k^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，最大の角の大きさは　$A = 150^\circ$

(2)　(1) から，2 番目に大きい角は　$\angle\mathrm{B}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{k^2 + (\sqrt{7}\,k)^2 - (\sqrt{3}\,k)^2}{2 \cdot k \cdot \sqrt{7}\,k} = \dfrac{5k^2}{2\sqrt{7}\,k^2} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

$1 + \tan^2 B = \dfrac{1}{\cos^2 B}$ であるから

$$\tan^2 B = \frac{1}{\cos^2 B} - 1 = \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 1 = \frac{28}{25} - 1 = \frac{3}{25}$$

$A > 90^\circ$ より $B < 90^\circ$ であるから　$\tan B > 0$

したがって　$\tan B = \sqrt{\dfrac{3}{25}} = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$

3

(解説)

$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を R とする。

正弦定理により　$\sin C = \dfrac{c}{2R}$，$\sin A = \dfrac{a}{2R}$

余弦定理により　$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

これらを等式 $\sin C = \cos B \sin A$ に代入すると

$$\frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{a}{2R} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{c}{2R} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4cR}$$

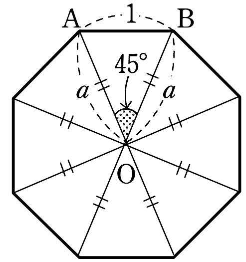
両辺に $4cR$ を掛けて　$2c^2 = c^2 + a^2 - b^2$　すなわち　$b^2 + c^2 = a^2$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は $A = 90^\circ$ の直角三角形である。

4

(解説)

(1)　図のように，正八角形を 8 個の合同な三角形に分け，3 点 O，A，B をとると　$\angle\mathrm{AOB} = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$



$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = a$ とすると，余弦定理により

$$1^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a\cos 45^\circ$$

整理して　$(2 - \sqrt{2})a^2 = 1$

ゆえに　$a^2 = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

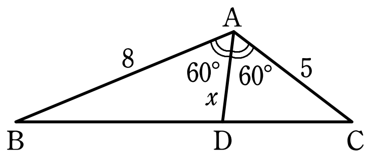
よって，求める面積は　$8\triangle\mathrm{OAB} = 8 \cdot \dfrac{1}{2}a^2 \sin 45^\circ = 2(1 + \sqrt{2})$

(2)　$\mathrm{AD} = x$ とする。$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD}$ であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 60^\circ$$

よって　$40 = 8x + 5x$

これを解いて　$x = \mathrm{AD} = \dfrac{40}{13}$



5

(解説)

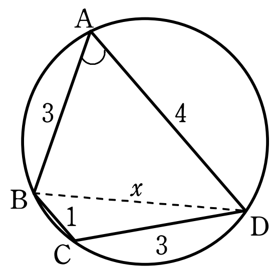
(1)　$\mathrm{BD} = x$ とする。$\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\cos A \quad \cdots\cdots ①$$

四角形 ABCD は円に内接するから　$C = 180^\circ - A$

$\triangle\mathrm{BCD}$ に余弦定理を適用して

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3\cos(180^\circ - A)$$
$$= 1^2 + 3^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3\cos A \quad \cdots\cdots ②$$



①，② から　$25 - 24\cos A = 10 + 6\cos A$

よって　$\cos A = \dfrac{1}{2}$　　したがって　$A = 60^\circ$

(2)　① より　$x^2 = 9 + 16 - 24\cos 60^\circ = 13$

$x > 0$ であるから　$x = \sqrt{13}$　　よって　$\mathrm{BD} = \sqrt{13}$

(3)　$A = 60^\circ$ より　$C = 120^\circ$

四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle ABD+\triangle BCD=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\sin 120^\circ$$

$$=\frac{12\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(4)　円 O は△ABDの外接円である。求める半径を R とすると

正弦定理より，$\dfrac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ}=2R$　　$\therefore$　$R=\dfrac{\sqrt{13}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

(5)　△ABD の内接円の半径を r とすると

$\triangle ABD=\dfrac{1}{2}r(AB+BD+DA)$

より　$\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times r\times(3+4+\sqrt{13})$

$$r=\frac{3\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{7+\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}=\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{39}}{6}$$

6

解説

(1)　三平方の定理から　$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

同様に　$AC=2\sqrt{2}$

よって　$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

また　$FM=\sqrt{FG^2+MG^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2)　△AFM において，余弦定理により

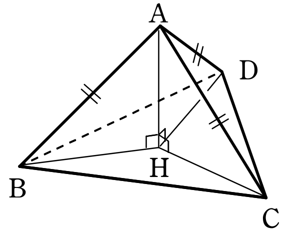
$$\cos\angle FAM=\frac{AF^2+AM^2-FM^2}{2AF\cdot AM}=\frac{8+9-5}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\angle FAM=45^\circ$

(3)　$\triangle AFM=\dfrac{1}{2}AF\cdot AM\sin\angle FAM=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sin 45^\circ=3$

7

解説



(1)　△ABH，△ACH，△ADH はいずれも直角三角形で

$AB=AC=AD$，　AH は共通

であるから，これらの直角三角形は合同である。

よって，$BH=CH=DH$ であるから，H は △BCD (正三角形) の外接円の中心である。

ゆえに，△BCDにおいて，正弦定理により

$$\frac{6}{\sin 60^\circ}=2\cdot BH$$

よって　$BH=\dfrac{6}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

したがって，三平方の定理により

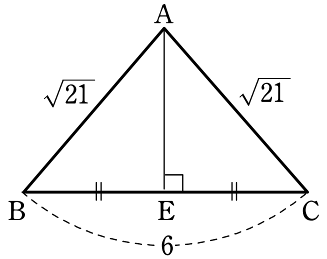
$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{(\sqrt{21})^2-(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{9}=3$$

(2)　$\triangle BCD=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$

よって，三角錐 ABCD の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BCD\cdot AH=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 3=9\sqrt{3}$$

(3)　△ABC は AB＝AC の二等辺三角形であるから，A から辺 BC に下ろした垂線を AE とすると



$$BE=CE=\frac{6}{2}=3$$

よって，三平方の定理により

$$AE=\sqrt{(\sqrt{21})^2-3^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

ゆえに　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

同様に　$\triangle ACD=\triangle ADB=6\sqrt{3}$

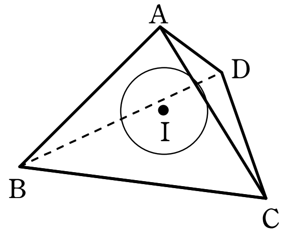
したがって，三角錐 ABCD の表面積を S とすると

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB+\triangle BCD$$

$$=3\times 6\sqrt{3}+9\sqrt{3}=27\sqrt{3}$$

(4) 内接する球の中心を I，半径を r とすると

$$V=(\text{三角錐 IABC})+(\text{三角錐 IACD})$$
$$+(\text{三角錐 IADB})+(\text{三角錐 IBCD})$$
$$=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ACD}\cdot r$$
$$+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ADB}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\cdot r$$
$$=\frac{1}{3}(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD}+\triangle\mathrm{ADB}+\triangle\mathrm{BCD})r=\frac{1}{3}Sr$$



よって，(2)，(3) の結果から　$9\sqrt{3}=\frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{3}\cdot r$　ゆえに　$r=1$

したがって，求める球の体積は　$\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$

$\boxed{8}$

(解説)

△ABC において，余弦定理により

$$\cos B=\frac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 6}=\frac{5}{7}$$

また　BD＝2

△ABD において，余弦定理により

$$\mathrm{AD}^2=7^2+2^2-2\cdot 7\cdot 2\cdot\frac{5}{7}=33$$

AD＞0 であるから　$\mathrm{AD}=\sqrt{33}$