

1 (各2点 計4点)

1 の 3 乗根のうち，虚数であるものの 1 つを ω とするとき，

$\omega^4 + \omega^3 + 3\omega^2 + 2\omega + 1 =$ であり， $\omega^{99} + \omega^{98} + \cdots + \omega^2 + \omega + 1 =$ である。

2 (3点)

$a > 0, b > 0$ のとき， $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ の最小値を求めよ。

3 (3点)

等式 $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{3x-1} = \frac{3x-8}{3x^2+5x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b の値を定めよ。

1 (各2点 計4点)

解答 (ア) -1 (イ) 1

2 (3点)

解答 9

3 (3点)

解答 $a=2, b=-3$

1 (各2点 計4点)

解説

$$\omega^3=1 \text{ より } (\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$$

$$\omega \neq 1 \text{ であるから } \omega^2+\omega+1=0$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \omega^4+\omega^3+3\omega^2+2\omega+1 &= \omega \cdot 1 + 1 + 3\omega^2 + 2\omega + 1 = 3\omega^2 + 3\omega + 2 \\ &= 3(\omega^2 + \omega + 1) - 1 = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \omega^{99} + \omega^{98} + \cdots + \omega^2 + \omega + 1 &= \omega^{97}(\omega^2 + \omega + 1) + \omega^{94}(\omega^2 + \omega + 1) + \cdots + \omega(\omega^2 + \omega + 1) + 1 \\ &= \omega^{97} \cdot 0 + \omega^{94} \cdot 0 + \cdots + \omega \cdot 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

2 (3点)

解説

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

$ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

等号は $ab = \frac{4}{ab}$ すなわち $ab = 2$ のとき成り立つ。

したがって、求める最小値は 9

3 (3点)

解説

$$\text{等式を変形すると } \frac{a}{x+2} + \frac{b}{3x-1} = \frac{3x-8}{(x+2)(3x-1)}$$

この等式が x についての恒等式ならば、その両辺に $(x+2)(3x-1)$ を掛けて得られる等式

$$a(3x-1) + b(x+2) = 3x-8$$

も恒等式である。左辺を x について整理すると

$$(3a+b)x - a + 2b = 3x - 8$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから $3a+b=3, -a+2b=-8$

これを解いて $a=2, b=-3$