【定期試験対策講習】

３学期
学年末考査
対策教材②

中２女学院数学

【注意事項】

本教材は

数学Ⅰ「２次方程式とグラフ」
数学Ａ「図形の性質」の互除法・不定方程式

の範囲から重要度の高い問題を集めています。

間違った問題は、本番では必ずできるように何度も解き直しをしてください。

STUDY-COLLABO

【問題】

$\boxed{1}$

k を定数とする。x の方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ がただ 1 つの実数解をもつような k の値を求めよ。

$\boxed{2}$

a は定数とする。放物線 $y=x^2-2x+a$ について

(1)　直線 $y=2x$ と接するように a の値を定めよ。

(2)　直線 $y=2x+3$ と共有点をもたないように a の値の範囲を定めよ。

$\boxed{3}$

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$\boxed{4}$

等式 $19x+26y=1$ を満たす整数 x，y の組を互除法を用いて 1 つ求めよ。

$\boxed{5}$

方程式 $9x+5y=1$ の整数解をすべて求めよ。

$\boxed{6}$

n は自然数とする。n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数として考えられる数をすべて求めよ。

$\boxed{7}$

$xy-2x+4y+1=0$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{8}$

次の等式を満たす自然数 x，y，z の組をすべて求めよ。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \quad (x \leqq y \leqq z)$$

$\boxed{9}$

2 つの 2 次方程式 $2x^2+kx+4=0$，$x^2+x+k=0$ が共通の実数解をもつように定数 k の値を定め，その共通解を求めよ。

$\boxed{10}$

次の方程式を満たす整数 x，y を求めよ。

(1)　$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$

【解答&解説】

$\boxed{1}$

解答　$k=-4,\ 0,\ 1$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$a=4$　　(2)　$a>7$

$\boxed{3}$

解答　$a=-4,\ b=8$ または $a=1,\ b=-2$

$\boxed{4}$

解答　$x=11,\ y=-8$

$\boxed{5}$

解答　$x=5k-1,\ y=-9k+2$ (k は整数)

$\boxed{6}$

解答　1，2，3，6

$\boxed{7}$

解答　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

$\boxed{8}$

解答　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

$\boxed{9}$

解答　$k=-6$，共通解 $x=2$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$　　(2)　$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$

$\boxed{1}$

解説

[1]　$k=0$ のとき，方程式は　　$-4x+3=0$

よって，$x=\dfrac{3}{4}$ となり，ただ 1 つの実数解をもつ。

[2]　$k\fallingdotseq 0$ のとき，2 次方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k(k+3)=-k^2-3k+4=-(k^2+3k-4)=-(k-1)(k+4)$$

ただ 1 つの実数解をもつのは $D=0$ のときである。

ゆえに　$(k-1)(k+4)=0$　　よって　$k=1,\ -4$

これは，$k\fallingdotseq 0$ を満たす。

以上から，求める k の値は　$k=-4,\ 0,\ 1$

$\boxed{2}$

解説

(1)　$y=x^2-2x+a$ …… ①，$y=2x$ …… ② とおく。

①，② から y を消去すると　$x^2-2x+a=2x$

整理すると　$x^2-4x+a=0$ …… ③

③ について，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot a=4-a$$

放物線 ① と 直線 ② が接するための条件は，2 次方程式 ③ が重解をもつことであるから　$D=0$　すなわち　$a=4$

(2)　$y=x^2-2x+a$ …… ①，$y=2x+3$ …… ② とおく。

①，② から y を消去すると　$x^2-2x+a=2x+3$

整理すると　$x^2-4x+a-3=0$ …… ③

③ について，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(a-3)=-a+7$$

放物線 ① と直線 ② が共有点をもたないための条件は，2 次方程式 ③ が実数解をもたないことであるから

$D<0$　すなわち　$a>7$

$\boxed{3}$

解説

放物線 $y=x^2+2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$1=1+2a+b$　すなわち　$b=-2a$ …… ①

よって，放物線の方程式は

$$y=x^2+2ax-2a=(x+a)^2-a^2-2a$$

と変形できるから，頂点は

$$点\,(-a,\ -a^2-2a)$$

頂点が直線 $y=-x-4$ 上にあるとき

$$-a^2-2a=-(-a)-4 \qquad よって \qquad a^2+3a-4=0$$

ゆえに　$(a+4)(a-1)=0$　　したがって　$a=-4,\ 1$

① から　$a=-4$ のとき　$b=8$,　$a=1$ のとき　$b=-2$

以上から　$a=-4,\ b=8$　または　$a=1,\ b=-2$

$\boxed{4}$

(解説)

$26=19\cdot1+7$　移項すると　$7=26-19\cdot1$

$19=7\cdot2+5$　移項すると　$5=19-7\cdot2$

$7=5\cdot1+2$　移項すると　$2=7-5\cdot1$

$5=2\cdot2+1$　移項すると　$1=5-2\cdot2$

よって　$1=5-2\cdot2=5-(7-5\cdot1)\cdot2$

$=5\cdot3-7\cdot2=(19-7\cdot2)\cdot3-7\cdot2$

$=19\cdot3+7\cdot(-8)=19\cdot3+(26-19\cdot1)\cdot(-8)$

$=19\cdot11+26\cdot(-8)$

すなわち　$19\cdot11+26\cdot(-8)=1$　……①

したがって，求める整数 x，y の組の 1 つは

$$x=11,\ y=-8$$

$\boxed{5}$

(解説)

$9x+5y=1$　……①

$x=-1$，$y=2$ は ① の整数解の 1 つである。

よって　$9\cdot(-1)+5\cdot2=1$　……②

①−② から　$9(x+1)+5(y-2)=0$

すなわち　$9(x+1)=-5(y-2)$　……③

9 と 5 は互いに素であるから，$x+1$ は 5 の倍数である。

ゆえに，k を整数として，$x+1=5k$ と表される。

③ に代入して　$9\cdot5k=-5(y-2)$　すなわち　$y-2=-9k$

よって，解は　$x=5k-1$，$y=-9k+2$（k は整数）

$\boxed{6}$

(解説)

$$n^2+3n+8=(n+2)(n+1)-2+8$$
$$=(n+2)(n+1)+6$$

よって，n^2+3n+8 と $n+2$ の最大公約数は，$n+2$ と 6 の最大公約数に等しい。

したがって，最大公約数として考えられる数は，6 の正の約数の 1，2，3，6 である。

$\boxed{7}$

(解説)

$xy-2x+4y+1=0$ から　$(x+4)(y-2)+8+1=0$

すなわち　$(x+4)(y-2)=-9$

x，y は整数であるから，$x+4$，$y-2$ も整数である。

よって　$(x+4,\ y-2)=(-9,\ 1),\ (-3,\ 3),\ (-1,\ 9),\ (1,\ -9),\ (3,\ -3),\ (9,\ -1)$

ゆえに　$(x,\ y)=(-13,\ 3),\ (-7,\ 5),\ (-5,\ 11),\ (-3,\ -7),\ (-1,\ -1),\ (5,\ 1)$

$\boxed{8}$

(解説)

$0<x\leqq y\leqq z$ であるから　$\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$　……①

よって　$1=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}$

すなわち　$1\leqq\dfrac{3}{x}$　　ゆえに　$x\leqq3$

x は自然数であるから　$x=1,\ 2,\ 3$

[1]　$x=1$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$

　これを満たす自然数 y，z の組はない。

[2]　$x=2$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$　……②

ここで，① から　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}$

よって　$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 4$

y は自然数で，$2=x\leqq y$ であるから　$y=2,\ 3,\ 4$

$y=2$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=0$　　これを満たす自然数 z はない。

$y=3$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{6}$　　よって　$z=6$　(これは適する)

$y=4$ のとき，② から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$　　よって　$z=4$　(これは適する)

[3]　$x=3$ のとき　$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$　……③

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{2}{y}$ であるから　$\dfrac{2}{3}\leqq\dfrac{2}{y}$　　ゆえに　$y\leqq 3$

y は自然数で，$3=x\leqq y$ であるから　$y=3$

このとき，③ から　$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$　　よって　$z=3$　(これは適する)

以上から　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

9

解説

共通解を $x=\alpha$ とおいて，方程式にそれぞれ代入すると

$2\alpha^2+k\alpha+4=0$ ……①，$\alpha^2+\alpha+k=0$ ……②

①$-$②$\times 2$ から　$(k-2)\alpha+4-2k=0$　　ゆえに　$(k-2)(\alpha-2)=0$

よって　$k=2$　または　$\alpha=2$

[1]　$k=2$ のとき

2 つの方程式はともに $x^2+x+2=0$ で，同じ方程式になる。

ところが，判別式を D とすると $D=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$ であるから，実数解をもたない。

[2]　$\alpha=2$ のとき

② から　$2^2+2+k=0$　　よって　$k=-6$

このとき，2 つの方程式は $2x^2-6x+4=0$，$x^2+x-6=0$ となり，$x=2$ は共通解である。

以上から　$k=-6$，共通解は $x=2$

10

解説

(1)　$(2x-y+a)(x+2y+b)=2x^2+3xy-2y^2+(a+2b)x+(2a-b)y+ab$

となり，$a+2b=-3$，$2a-b=4$ を解くと

$a=1,\ b=-2$

ゆえに　$(2x-y+1)(x+2y-2)=2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-2$

$2x^2+3xy-2y^2-3x+4y-5=0$ を変形すると

$(2x-y+1)(x+2y-2)-3=0$

よって　$(x+2y-2)(2x-y+1)=3$

x，y は整数であるから，$x+2y-2$，$2x-y+1$ も整数である。

したがって　$\begin{cases}x+2y-2=-3\\2x-y+1=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=-1\\2x-y+1=-3\end{cases}$

$\begin{cases}x+2y-2=1\\2x-y+1=3\end{cases}$　$\begin{cases}x+2y-2=3\\2x-y+1=1\end{cases}$

これらの連立方程式の解は，順に

$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ \left(-\dfrac{7}{5},\ \dfrac{6}{5}\right),\ \left(\dfrac{7}{5},\ \dfrac{4}{5}\right),\ (1,\ 2)$

x，y がともに整数であるものは

$(x,\ y)=(-1,\ 0),\ (1,\ 2)$

(2)　$x^2-2xy+2y^2-2x-3y+5=0$ を x について整理すると

$x^2-2(y+1)x+2y^2-3y+5=0$　……①

① を x について解くと

$x=y+1\pm\sqrt{(y+1)^2-(2y^2-3y+5)}$

$=y+1\pm\sqrt{-y^2+5y-4}$　……②

② は実数であるから

$-y^2+5y-4\geqq 0$

よって　$-(y-1)(y-4)\geqq 0$　　ゆえに　$1\leqq y\leqq 4$

yは整数であるから　$y=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$y=1$ のとき，① は　$x^2-4x+4=0$

よって　$(x-2)^2=0$　ゆえに　$x=2$

$y=2$ のとき，① は　$x^2-6x+7=0$

これを解いて　$x=3\pm\sqrt{2}$

$y=3$ のとき，① は　$x^2-8x+14=0$

これを解いて　$x=4\pm\sqrt{2}$

$y=4$ のとき，① は　$x^2-10x+25=0$

よって　$(x-5)^2=0$　ゆえに　$x=5$

x，yがともに整数であるものは

$(x,\ y)=(2,\ 1),\ (5,\ 4)$