$\boxed{1}$

（解説）

(1)　(i)　$\alpha=\beta$ のとき，$\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=2\theta$ より

$$\theta+\frac{\pi}{6}=2\theta \quad \text{よって} \quad \theta=\frac{\pi}{{}^{\text{ア}}6}$$

また，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\theta=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{イ}}3}}{{}^{\text{ウ}}2}$

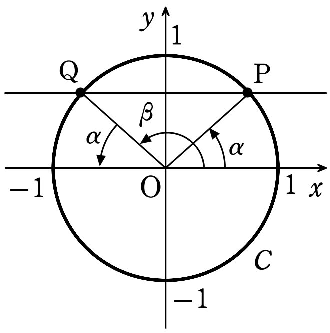
(ii)　$\sin\alpha$ は点 P の y 座標，$\sin\beta$ は点 Q の y 座標であるから，$\sin\alpha=\sin\beta$ が成り立つとき，つねに点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しい。（${}^{\text{エ}}$ ②）

(iii)　(ii) と同様の点 P と点 Q について考える。

[1]　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{6}\leqq\alpha\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ かつ $0\leqq\beta\leqq\pi$ かつ $\theta\fallingdotseq\!\!\!\!/\ \dfrac{\pi}{6}$ である

ことから，② が成り立つ，すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは，右の図のように，$\alpha+\beta=\pi$ が成り立つときである。（${}^{\text{オ}}$ ②）



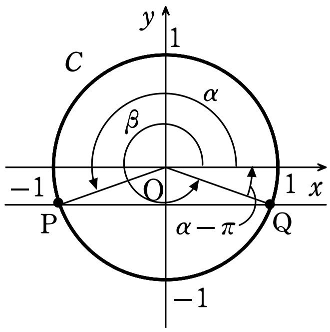
これより　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=\pi$

よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のときの ① の解は　$\theta=\dfrac{{}^{\text{カ}}5}{{}^{\text{キク}}18}\pi$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のとき

$\dfrac{2}{3}\pi<\alpha<\dfrac{7}{6}\pi$ かつ $\pi<\beta<2\pi$ かつ $\theta\fallingdotseq\!\!\!\!/\ \dfrac{\pi}{6}$ である

ことから，② が成り立つ，すなわち点 P の y 座標と点 Q の y 座標が等しくなるのは，右の図のように，$(\alpha-\pi)+\beta=2\pi$，すなわち $\alpha+\beta=3\pi$ が成り立つときである。（${}^{\text{ケ}}$ ⑥）



これより　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=3\pi$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ のときの ① の解は　$\theta=\dfrac{{}^{\text{コサ}}17}{{}^{\text{シス}}18}\pi$

(2)　$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos 2\theta$　…… ③ とおく。(1) の α，β を用いれば，③ は

$\cos\alpha=\cos\beta$　…… ④ と表せる。

ここで，$\alpha=\beta$ を満たす θ は $\theta+\dfrac{\pi}{6}=2\theta$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

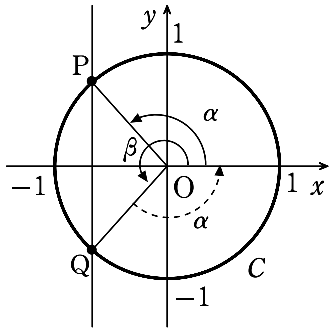
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ を除く ③ の解について考える。(1) の (ii) と同様に考えれば，④ が成り立つとき，つねに点 P の x 座標と点 Q の x 座標は等しい。したがって，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ として，点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなるような θ の値を考えればよい。

[1]　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \alpha \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ かつ $0 \leqq \beta \leqq \pi$ かつ $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ であるから，点 P および点 Q は第 1 象限または第 2 象限にあり，この範囲で点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなることはない。

[2]　$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき

$\dfrac{2}{3}\pi < \alpha < \dfrac{7}{6}\pi$ かつ $\pi < \beta < 2\pi$ かつ $\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{6}$ であることから，④ が成り立つ，すなわち点 P の x 座標と点 Q の x 座標が等しくなるのは，右の図のように，α が第 2 象限の角，β が第 3 象限の角のときで，$\alpha+\beta=2\pi$ が成り立つときである。



これより　$\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\theta=2\pi$

よって，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のときの ③ の解は　$\theta=\dfrac{11}{18}\pi$

[1]，[2] を含む以上の考察から，$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，③ の解は　$\theta=\dfrac{\pi}{{}_{\text{セ}}6}$，$\dfrac{{}^{\text{ソタ}}11}{{}_{\text{チツ}}18}\pi$

参考　三角関数の和と積の公式により，③ は以下のように解くこともできる。

$$\cos 2\theta-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$-2\sin\left(\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{12}\right)=0$$

$0 \leqq \theta < \pi$ より，$\dfrac{\pi}{12} \leqq \dfrac{3}{2}\theta+\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{19}{12}\pi$，$-\dfrac{\pi}{12} \leqq \dfrac{1}{2}\theta-\dfrac{\pi}{12} < \dfrac{5}{12}\pi$ であるから

$$\frac{3}{2}\theta+\frac{\pi}{12}=\pi \text{ または } \frac{1}{2}\theta-\frac{\pi}{12}=0$$

よって　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{11}{18}\pi$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　r は 1 日ごとの水草 A の量の増加する倍率であるから，水草 A の量は，1 日目の正午には 0 日目の正午の r 倍，2 日目の正午には r^2 倍，3 日目の正午には r^3 倍となる。

観測結果から，3 日目の正午の水草 A の量は 0 日目の正午の 1.32 倍であるから，

r は $r^3=1.32$ を満たす。(ア ③)

この式の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} r^3=\log_{10} 1.32$$

常用対数表より，$\log_{10} 1.32=0.1206$ (イ ①) であるから

$$3\log_{10} r=0.1206$$

よって　$\log_{10} r=0.^{\text{ウエオカ}}0402$

(2)　水草 A の量は，14 日目の正午には，0 日目の正午の量の r^{14} 倍，すなわち

a の r^{14} 倍となる。(キ ③)

いま，0 日目の正午に a %だった水草 A の量が，14 日目の正午に 60 % となることから　$a\times r^{14}={}^{\text{クケ}}60$　…… ①

① の両辺の常用対数をとり，(1) で求めた $\log_{10} r=0.0402$ と $\log_{10} 6=0.7782$ であることを用いると，

$$\log_{10}(a\times r^{14})=\log_{10} 60$$

$$\log_{10} a+14\log_{10} r=\log_{10} 6+\log_{10} 10$$

$$\log_{10} a=\log_{10} 6+1-14\log_{10} r$$

$$\log_{10} a=0.7782+1-14\times 0.0402$$

$$\log_{10} a=1.2154 \quad (\text{コ } ③)$$

また，$\log_{10} a=0.2154+1$ であって，常用対数表より，$\log_{10} 1.64=0.2148$，$\log_{10} 1.65=0.2175$ であるから

$$\log_{10} 1.64+1<\log_{10} a<\log_{10} 1.65+1$$

$$\log_{10} 16.4<\log_{10} a<\log_{10} 16.5$$

底 10 は 1 より大きいから　$16.4<a<16.5$

したがって，a 以下の最大の整数は　${}^{\text{サシ}}16$

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $F(x)=2x^3+3x^2$ のとき

$$f(x)=F'(x)={}^{\text{ア}}6x^2+{}^{\text{イ}}6x=6x(x+1)$$

$F'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ -1$

$F(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$F(x)$ は $x={}^{\text{ウエ}}-1$ で極大値をとる。

また，$G'(x)=f(x)$ であるから

$$G(x)=\int f(x)\,dx=\int(6x^2+6x)\,dx$$

$$={}^{\text{オ}}2x^3+{}^{\text{カ}}3x^2+C\quad (C\text{ は積分定数})\quad \cdots\cdots ①$$

と表される。

$G'(x)=F'(x)=6x(x+1)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$G(x)$ は $x={}^{\text{キ}}0$ で極小値をとる。

さらに，条件より，$G(x)$ は $x=k$ で極大値 0 をとるから，$k=-1$ であり　　$G(-1)=0$

これと ① から　　$2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2+C=0$

ゆえに　　$C={}^{\text{クケ}}-1$

(2) (i) $F(x)$ が $x=0$ で極小値をとることと，$F'(x)=f(x)$ から，

$$F'(0)=f(0)={}^{\text{コ}}0$$

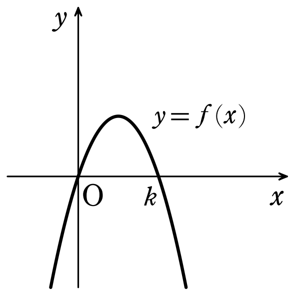
であり，$x=0$ の前後で $F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は負から正に変わる。　(サ ⓪)

$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとることと，$G'(x)=f(x)$ から，

$$G'(k)=f(k)={}^{\text{シ}}0$$

であり，$x=k$ の前後で $G'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号は正から負に変わる。　(ス ①)

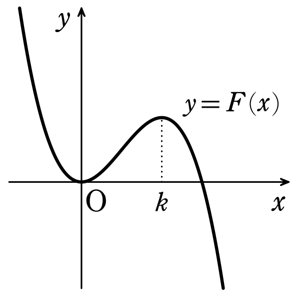
さらに，$f(x)$ は 2 次関数であり，$k>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



$F'(x)$ すなわち $f(x)$ の符号の変化に注意して，$F(x)$ の増減表をかくと，次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

条件より，$F(0)=0$ であるから，$y=F(x)$ のグラフの概形は右の図のようになる。　(セ ③)

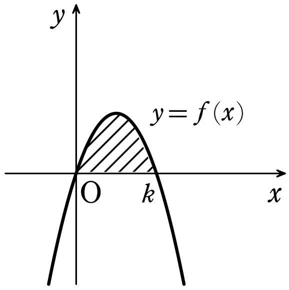


(ii) $F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$ であるから，すべての実数 x に対して

$$F(x)=F(x)-F(0)=\int_0^x F'(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$$ （ソ ③，タ ⓪）

これと (i) の考察により，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)\,dt$　（チ ②，ツ ⓪）

ここで，定積分 $\int_0^k f(t)\,dt$ は，右の図の斜線部分の面積と等しい。



よって，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積と等しいことがわかる。

（テ ⓪，ト ⓪）

また，$G'(x)=F'(x)$ であるから，$G(x)$ の増減表は，$F(x)$ と同じく次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	k	$\cdots$
$G'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$G(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

さらに，条件より，$G(k)=0$ であるから，すべての実数 x に対して

$$G(x)=G(x)-G(k)=\int_k^x G'(t)\,dt=\int_k^x f(t)\,dt$$

よって，$F(x)$ の極大値は　$F(k)=\int_0^k f(t)\,dt=-\int_k^0 f(t)\,dt=-G(0)$

$G(0)$ は $G(x)$ の極小値であるから，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）

別解　$F'(x)=G'(x)=f(x)$ であるから，$F(x)$ と $G(x)$ はともに $f(x)$ の原始関数で，

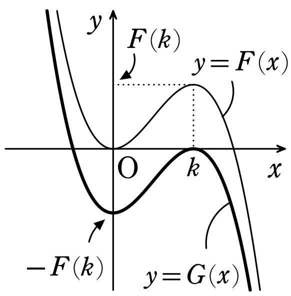
$$G(x)=F(x)+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

と表される。

このとき，$G(k)=F(k)+C$ であり，$G(k)=0$ であるから　$C=-F(k)$

よって　$G(x)=F(x)-F(k)$

ゆえに，$y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸方向に $-F(k)$ だけ平行移動したものであり，右の図の太線部分のようになる。

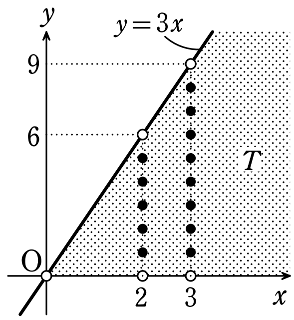


したがって，$G(x)$ の極小値は $-F(k)$ であるから，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の極小値の -1 倍と等しい。　（ナ ②）

4

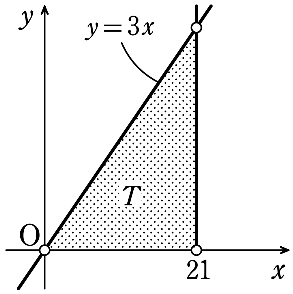
解説

(1)　直線 $x=2$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$ の 5 個ある。
よって　　$a_2={}^{ア}5$
直線 $x=3$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(3,\ 7)$, $(3,\ 8)$ の 8 個ある。
よって　　$a_3={}^{イ}8$
直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものの個数は，n が 1 だけ大きくなると，3 個ずつ増えていくから，数列 $\{a_n\}$ は公差が ${}^{エ}3$ の等差数列である。
$\left({}^{ウ}\ 0,\ {}^{オ}\ 0\right)$



$1\leqq n\leqq 20$ より，T の内部にある格子点の個数は，初項 $a_1=2$，公差 3，項数 20 の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2+(20-1)\cdot 3\}={}^{カキク}610$$

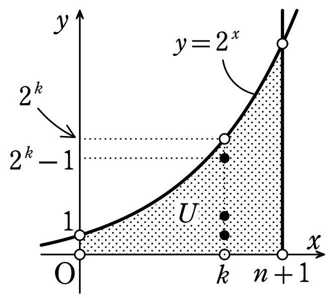


別解　直線 $x=n$ 上の格子点で T の内部にあるものは
点 $(n,\ 1)$, $(n,\ 2)$, ……, $(n,\ 3n-1)$ の $(3n-1)$ 個ある。
よって　　$a_n=3n-1$
ゆえに，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 ${}^{エ}3$ の等差数列である。　$\left({}^{ウ}\ 0,\ {}^{オ}\ 0\right)$
したがって，T の内部にある格子点の個数は

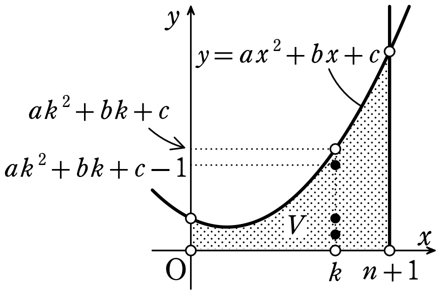
$$\sum_{n=1}^{20}(3n-1)=\frac{3}{2}\cdot 20\cdot(20+1)-20={}^{カキク}610$$

(2)　関数 $y=2^x$ のグラフと x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 U は右の図のようになる。
直線 $x=k$ 上の格子点で U の内部にあるものは
点 $(k,\ 1)$, $(k,\ 2)$, ……, $(k,\ 2^k-1)$ の (2^k-1) 個ある。　$\left({}^{ケ}\ 7\right)$
したがって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n$$
$$=2^{n+1}-n-2\quad\left({}^{コ}\ 1,\ {}^{サ}\ 7\right)$$



(3)　$a>0$，$b^2-4ac<0$ であるとき，放物線 $y=ax^2+bx+c$ は下に凸で，x 軸との共有点をもたない。



よって，放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸，y 軸および直線 $x=n+1$ で囲まれた図形 V は右の図のようになる。

直線 $x=k$ 上の格子点で V の内部にあるものの個数は　$(ak^2+bk+c-1)$ 個

したがって，V の内部にある格子点の個数が n^3 となるとき

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)=n^3$$

すなわち　$\dfrac{a}{6}n(n+1)(2n+1)+\dfrac{b}{2}n(n+1)+(c-1)n=n^3$

左辺を n について整理すると

$$\frac{1}{3}an^3+\frac{1}{2}(a+b)n^2+\left(\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1\right)n=n^3$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つから

$$\frac{1}{3}a=1,\quad \frac{1}{2}(a+b)=0,\quad \frac{a}{6}+\frac{b}{2}+c-1=0$$

これを解いて　$a={}^{シ}3$，$b={}^{スセ}-3$，$c={}^{ソ}2$

(これらは，a，b，c が整数で，$a>0$，$b^2-4ac<0$ の条件を満たす。)

$\boxed{5}$

(解説)

(1)　レモンの重さ X は平均 110 g，標準偏差 20 g の正規分布 $N(110,\ 20^2)$ に従うから，

$Z=\dfrac{X-110}{20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，無作為抽出した 1 個のレモンが L サイズである確率は，正規分布表から

$$\begin{aligned}P(110\leqq X<140)&=P(110\leqq X\leqq 140)\\&=P\left(\frac{110-110}{20}\leqq\frac{X-110}{20}\leqq\frac{140-110}{20}\right)\\&=P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.^{\text{アイウエ}}4332\end{aligned}$$

Q 地域で収穫されるレモン 1 個を無作為に抽出するとき，それが L サイズである確率は 0.4332 であるから，レモンが 200000 個収穫されるとすると，その中の L サイズのレモンの個数 Y は二項分布 $B(200000,\ 0.4332)$ に従う。

よって，Y の平均 (期待値) は　　$200000\cdot 0.4332=86640$　(オ ④)

(2)　Q 地域で今年収穫されるレモン全体を母集団とし，その重さの母平均が m g，母標準偏差が σ g であるから，n が十分に大きいとき，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。　(カ ⑥)

また，m に対する信頼度 95 % の信頼区間は $\overline{W}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq\overline{W}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ であるから　　$B-A=\left(\overline{W}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{W}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}$　(キ ⑤)

したがって，$\sigma=20$ として，$B-A\leqq 4$ すなわち，$\dfrac{3.92\sigma}{\sqrt{n}}\leqq 4$　…… ① を満たす自然数 n を求める。

① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して整理すると　　$(3.92\sigma)^2\leqq 16n$

$\sigma=20$ を代入して　　$3.92^2\times 20^2\leqq 16n$

$$\begin{aligned}&3.92^2\times 5^2\leqq n\\&19.6^2\leqq n\\&384.16\leqq n\end{aligned}$$

よって，① を満たす最小の自然数 n_0 は　　$n_0={}^{\text{クケコ}}385$

(3)　$m\leqq 110$ を前提として考える。

対立仮説は検証したい仮説であるから，「Q 地域で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽い」，すなわち，「$m<110$」である。　(サ ⓪)

帰無仮説「$m=110$」が正しいと仮定すると，標本の大きさ 400 は十分に大きいから，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(110,\ \dfrac{20^2}{400}\right)$，すなわち $N(110,\ 1)$ に従う。　(シ ⑤)

よって，$Z'=\dfrac{\overline{W}-110}{1}=\overline{W}-110$ とおくと，確率変数 Z' は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うから，正規分布表より

$$\begin{aligned}P(\overline{W}\leqq 108.2)&=P(\overline{W}-110\leqq 108.2-110)\\&=P(Z'\leqq -1.8)=P(Z'\geqq 1.8)\end{aligned}$$

$$=0.5-P(0 \leqq Z' \leqq 1.8)$$

$$=0.5-0.4641=0.{}^{スセソタ}0359$$

この値をパーセント表示すると 3.59 % であり，有意水準 5 % より小さいから，帰無仮説は棄却される。 $\left({}^{チ}\ ①\right)$

したがって，有意水準 5 % で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110 g より軽いと判断できる。 $\left({}^{ツ}\ ⓪\right)$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　点Cは O を中心とする半径1の球面 S 上にあるから　　$|\overrightarrow{OC}|=1$

よって　　$|\overrightarrow{OC}|^2=$ ア1

$C(x,\ y,\ z)$ であるから　　$x^2+y^2+z^2=1$　…… ①

△ABCが正三角形であるとするとき，△OACと△OABは，OAは共通な辺で，

OC＝OB，AC＝ABより　　△OAC≡△OAB

したがって，対応する角の大きさも等しいから　　∠AOC＝∠AOB

また，点A，Bは球面 S 上の点であるから　　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$

よって　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle AOC=\cos\angle AOC$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB=\cos\angle AOB$

これと∠AOC＝∠AOBから　　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　(イ ④)

さらに，$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=\left(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OC}=(x,\ y,\ z)$ より

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=x$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\cdot a+0\cdot\sqrt{1-a^2}+0\cdot 0=a$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ から　　$x=a$　…… ②　(ウ ⓪)

同様に，△OBC≡△OABであるから　　$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$a\cdot x+\sqrt{1-a^2}\cdot y+0\cdot z=a$

すなわち　　$ax+\sqrt{1-a^2}\,y=a$　…… ③　(エ ⓪，オ ⑤)

逆に，実数 x，y，z が①，②，③を満たすとき，点Cは S 上の点であり，△ABCは正三角形である。　　…… (*)

(2)　(i)　$a=\dfrac{3}{5}$ のとき，②から　　$x=\dfrac{{}^{カ}3}{{}^{キ}5}$

③から　　$\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=\dfrac{3}{5}$

$x=\dfrac{3}{5}$ を代入して　　$y=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケコ}10}$

このとき，①から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-\dfrac{9}{25}-\dfrac{9}{100}=\dfrac{55}{100}$

よって，①を満たす実数 z は $z=\pm\dfrac{\sqrt{55}}{10}$ のちょうど2つある。　(サ ②)

したがって，△ABCが正三角形となる S 上の点Cはちょうど2つある。

(ii)　$a=-\dfrac{3}{5}$ のとき，②から　　$x=-\dfrac{3}{5}$

③から　　$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=-\dfrac{3}{5}$

$x=-\dfrac{3}{5}$ を代入して　　$y=-\dfrac{6}{5}$

このとき，①から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-\dfrac{9}{25}-\dfrac{36}{25}=-\dfrac{4}{5}$

$z^2\geqq 0$ より，これを満たす実数 z は存在しないから，△ABCが正三角形となる S 上

の点 C はない。　$\left({}^{シ}\ \text{⓪}\right)$

(3)　② を ③ に代入して　　$a^2+\sqrt{1-a^2}\,y=a$

$$\sqrt{1-a^2}\,y=a(1-a)$$

$-1<a<1$ より，$\sqrt{1-a^2}\neq 0$ であるから　　$y=\dfrac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$

このとき，① から　　$z^2=1-x^2-y^2=1-a^2-\dfrac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}$

$$=\frac{(1-a^2)^2-a^2(1-a)^2}{1-a^2}=\frac{(1-a)(1+a)^2-a^2(1-a)}{1+a}$$

$$=\frac{\{(1+a)^2-a^2\}(1-a)}{1+a}=\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}\quad \left({}^{ス}\ \text{③}\right)$$

$z^2\geqq 0$，$1+a>0$ であるから，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ である。

逆に，$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ のとき，実数 z が存在するから，①，②，③ を満たす実数 x，y，z があることがわかる。

$(1+2a)(1-a)\geqq 0$ より　　$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$

$-1<a<1$ と合わせて　　$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$

以上のことから，$-\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ は △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。　$\left({}^{セ}\ \text{④}\right)$

参考　((1) の (*) の証明)

① が成立するとき，点 C は球面 S 上に存在する。

また，② が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から　　$\cos\angle\mathrm{AOC}=\cos\angle\mathrm{AOB}$

よって，△OAC，△OAB で余弦定理と，OA＝OB＝OC から

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OC}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\angle\mathrm{AOC}\\&=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\angle\mathrm{AOB}\\&=\mathrm{AB}^2\end{aligned}$$

すなわち，AC＝AB が成り立つから，OA は共通，OB＝OC と合わせて

$$\triangle\mathrm{OAC}\equiv\triangle\mathrm{OAB}$$

したがって　AC＝AB

さらに，③ が成立するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，② のときと同様にして

$$\triangle\mathrm{OBC}\equiv\triangle\mathrm{OAB}$$

したがって　BC＝AB

ゆえに　　AB＝BC＝AC

以上より，実数 x，y，z が ①，②，③ を満たすとき，点 C は S 上の点であり，△ABC は正三角形である。