1

点 P$(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

解答　$x=-5$，$3x+4y=25$

解説

接点を Q$(x_1,\ y_1)$ とすると

$x_1{}^2+y_1{}^2=25$ ……①

点 Q における接線の方程式は

$x_1x+y_1y=25$ ……②

この直線が点 P$(-5,\ 10)$ を通るから

$-5x_1+10y_1=25$

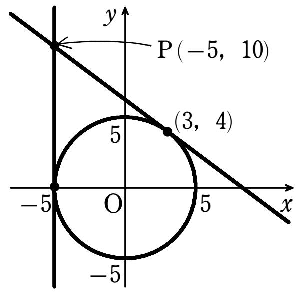
ゆえに　$x_1=2y_1-5$ ……③

① に代入して　$(2y_1-5)^2+y_1{}^2=25$

整理して　$y_1{}^2-4y_1=0$　ゆえに　$y_1=0,\ 4$

③ から　$y_1=0$ のとき　$x_1=-5$，　$y_1=4$ のとき　$x_1=3$

よって，接線の方程式は，② から　$x=-5$，$3x+4y=25$



別解　[1]　点 P を通り，x 軸に垂直な直線 $x=-5$ は，円 $x^2+y^2=25$ の接線である。

[2]　点 P を通り，x 軸に垂直でない，傾き m の直線の方程式は

$y-10=m(x+5)$　すなわち　$mx-y+5m+10=0$ ……①

直線 ① が円 $x^2+y^2=25$ に接するための条件は，円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 ① の距離が円の半径 5 に等しいことである。

よって　$\dfrac{|5m+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=5$　すなわち　$\dfrac{|m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$

分母を払って　$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　$(m+2)^2=m^2+1$

整理して　$4m+3=0$　これを解いて　$m=-\dfrac{3}{4}$

これを ① に代入して整理すると　$3x+4y=25$

以上から，求める接線の方程式は　$x=-5$，$3x+4y=25$

2

点 $(5,\ 6)$ から円 $x^2+y^2=9$ に引いた 2 つの接線の接点を P，Q とするとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

解答　$5x+6y=9$

解説

P$(p,\ q)$，Q$(p',\ q')$ とすると，接線の方程式はそれぞれ　$px+qy=9$，　$p'x+q'y=9$

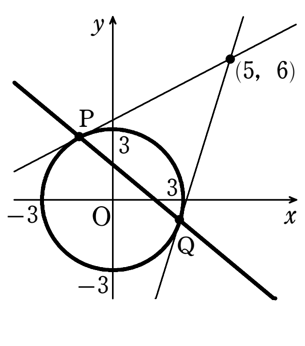
点 $(5,\ 6)$ を通るから，それぞれ

$5p+6q=9$，　$5p'+6q'=9$

を満たし，これは 2 点 P$(p,\ q)$，Q$(p',\ q')$ が直線 $5x+6y=9$ 上にあることを示している。

したがって，直線 PQ の方程式は

$5x+6y=9$



3

放物線 $y=x^2+a$ と円 $x^2+y^2=9$ について，次のものを求めよ。

(1)　この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2)　異なる 4 個の交点をもつような定数 a の値の範囲

解答　(1)　$a=-\dfrac{37}{4}$，±3　　(2)　$-\dfrac{37}{4}<a<-3$

解説

(1)　$y=x^2+a$ から　$x^2=y-a$

これを $x^2+y^2=9$ に代入して　$(y-a)+y^2=9$

よって　$y^2+y-a-9=0$ ……①

ここで，$x^2+y^2=9$ から　$x^2=9-y^2\geqq0$　ゆえに　$-3\leqq y\leqq3$ ……②

[1]　放物線と円が 2 点で接する場合

2 次方程式 ① は ② の範囲にある重解をもつ。

よって，① の判別式を D とすると　$D=0$

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a-9)=4a+37$ であるから　$4a+37=0$　すなわち　$a=-\dfrac{37}{4}$

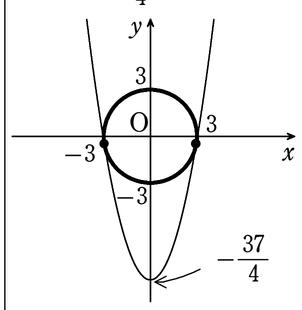
このとき，① の解は $y=-\dfrac{1}{2}$ となり，② を満たす。

[2]　放物線と円が 1 点で接する場合

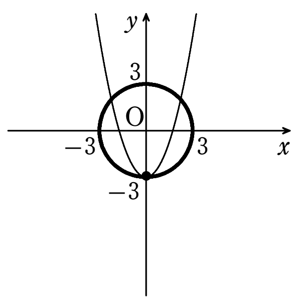
図から，点 $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$ で接する場合で　$a=\pm3$

以上から，求める a の値は　$a=-\dfrac{37}{4}$，±3

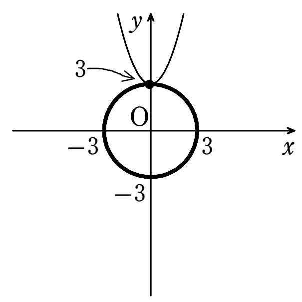
[1]　$a=-\dfrac{37}{4}$



[2]　$a=-3$

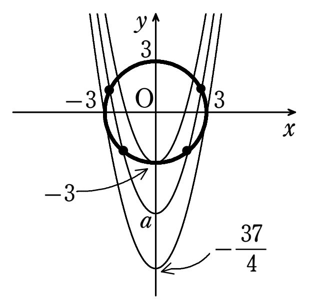


$a=3$



(2)　放物線と円が 4 個の共有点をもつのは，右の図から，放物線の頂点 $(0,\ a)$ が，点 $\left(0,\ -\dfrac{37}{4}\right)$ から点 $(0,\ -3)$ を結ぶ線分上（端点を除く）にあるときである。

したがって　$-\dfrac{37}{4}<a<-3$



4

(1) 円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の2つの交点と原点Oを通る円の方程式を求めよ。
(2) 円 $x^2+y^2-2kx-4ky+16k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず2点を通る。この2点の座標を求めよ。

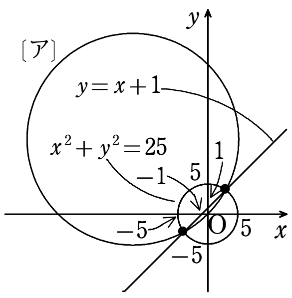
解答 (1) $x^2+y^2+25x-25y=0$ (2) $(0,\ 4)$, $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

解説

(1) k を定数として，次の方程式を考える。

$$k(x-y+1)+x^2+y^2-25=0 \quad \cdots\cdots ①$$

①は，円と直線の2つの交点を通る図形を表す。
図形①が原点を通るとして，①に $x=0$，$y=0$ を代入すると $k-25=0$ ゆえに $k=25$
①に代入して $25(x-y+1)+x^2+y^2-25=0$
整理すると $x^2+y^2+25x-25y=0$ ……［ア］
これは円を表すから，求める方程式である。



(2) 円の方程式を k について整理すると

$$-2(x+2y-8)k+x^2+y^2-16=0$$

この等式が k の値に関係なく成り立つための条件は

$$x+2y-8=0 \ \cdots\cdots ①,\quad x^2+y^2-16=0 \ \cdots\cdots ②$$

①，②から x を消去して $5y^2-32y+48=0$
ゆえに $(y-4)(5y-12)=0$ よって $y=4,\ \dfrac{12}{5}$
①から $y=4$ のとき $x=0$，$y=\dfrac{12}{5}$ のとき $x=\dfrac{16}{5}$
ゆえに，求める2点の座標は $(0,\ 4)$, $\left(\dfrac{16}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$

5

円 C_1 : $x^2+y^2=4$ と円 C_2 : $(x-5)^2+y^2=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

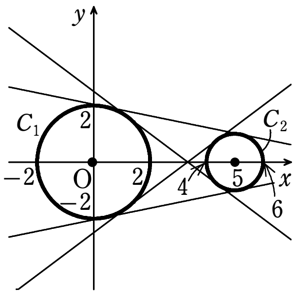
解答 $3x\pm4y=10$，$x\pm2\sqrt{6}\,y=10$

解説

円 C_1 上の接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると

$$x_1{}^2+y_1{}^2=4 \quad \cdots\cdots ①$$

接線の方程式は $x_1x+y_1y=4$ ……②
直線②が円 C_2 に接するための条件は，円 C_2 の中心 $(5,\ 0)$ と直線②の距離が，円 C_2 の半径1に等しいことであるから $\dfrac{|5x_1-4|}{\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}}=1$



①を代入して整理すると $|5x_1-4|=2$
よって $5x_1-4=\pm2$ したがって $x_1=\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}$
$x_1=\dfrac{6}{5}$ のとき，①から $y_1{}^2=\dfrac{64}{25}$ ゆえに $y_1=\pm\dfrac{8}{5}$
$x_1=\dfrac{2}{5}$ のとき，①から $y_1{}^2=\dfrac{96}{25}$ よって $y_1=\pm\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$
ゆえに，②から，求める接線の方程式は

$$\frac{6}{5}x\pm\frac{8}{5}y=4,\ \frac{2}{5}x\pm\frac{4\sqrt{6}}{5}y=4 \quad \text{すなわち} \quad 3x\pm4y=10,\ x\pm2\sqrt{6}\,y=10$$

別解 共通接線の方程式を $y=mx+n$ とすると，これが円 C_1，C_2 に接する条件は，
それぞれ $\dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$，$\dfrac{|5m+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$
したがって $|n|=2\sqrt{m^2+1}$，$|5m+n|=\sqrt{m^2+1}$ ……［ア］
よって $|n|=2|5m+n|$ ゆえに $n=-10m$ または $3n=-10m$
このようにして，一方の文字を消去し，連立方程式［ア］を解く。

6

2点 $A(6,\ 0)$，$B(3,\ 3)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点Qを3つの頂点とする三角形の重心Pの軌跡を求めよ。

解答 中心が点 $(3,\ 1)$，半径が1の円

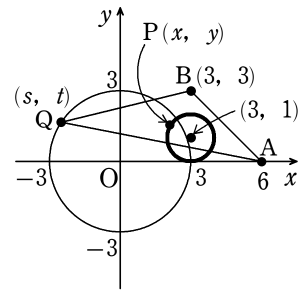
解説

$P(x,\ y)$，$Q(s,\ t)$ とする。
点Qは円 $x^2+y^2=9$ 上を動くから

$$s^2+t^2=9 \quad \cdots\cdots ①$$

点Pは△ABQの重心であるから

$$x=\frac{6+3+s}{3},\quad y=\frac{0+3+t}{3} \quad \cdots\cdots ②$$



②から $s=3x-9$，$t=3y-3$
①に代入して $(3x-9)^2+(3y-3)^2=9$
したがって $(x-3)^2+(y-1)^2=1$ ……③
ゆえに，点Pは円③上にある。
逆に，円③上の任意の点は，条件を満たす。
よって，求める軌跡は 中心が点 $(3,\ 1)$，半径が1の円

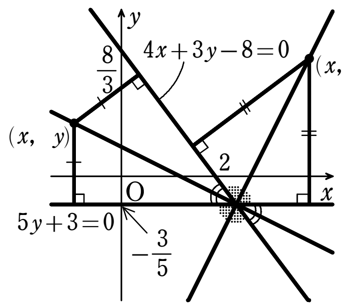
7

次の直線の方程式を求めよ。
(1) 2直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線
(2) 直線 ℓ : $x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

解答 (1) $4x-2y-11=0$，$4x+8y-5=0$ (2) $x+2y-3=0$

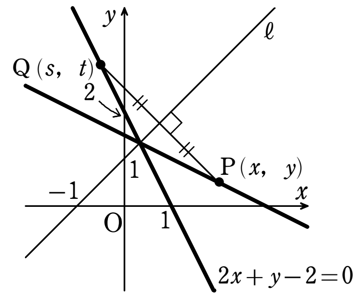
解説

(1) 求める二等分線上の点 $P(x,\ y)$ は，2直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ から等距離にある。
ゆえに $\dfrac{|4x+3y-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|0\cdot x+5y+3|}{\sqrt{0^2+5^2}}$
よって $4x+3y-8=\pm(5y+3)$
したがって，求める二等分線の方程式は
$4x+3y-8=5y+3$ から
$4x-2y-11=0$
$4x+3y-8=-5y-3$ から
$4x+8y-5=0$



(2) 直線 $2x+y-2=0$ 上の動点を $Q(s,\ t)$ とし，直線 ℓ に関して点Qと対称な点を $P(x,\ y)$ とする。
直線PQは ℓ に垂直であるから $\dfrac{t-y}{s-x}\cdot1=-1$
よって $s+t=x+y$ ……①
線分PQの中点は直線 ℓ 上にあるから

$$\frac{x+s}{2}-\frac{y+t}{2}+1=0$$



よって $s-t=-x+y-2$ ……②
①，②から $s=y-1$，$t=x+1$
点Qは直線 $2x+y-2=0$ 上を動くから $2s+t-2=0$
これに $s=y-1$，$t=x+1$ を代入して，求める直線の方程式は

$$2(y-1)+(x+1)-2=0 \quad \text{すなわち} \quad x+2y-3=0$$

8

放物線 $y=x^2$ 上の異なる2点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とし，その交点を R とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するように2点 P，Q が動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

解答　直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

解説

点 P における接線で x 軸に垂直なものはないから，
接線 ℓ_1 の傾きを m とすると，その方程式は

$$y-p^2=m(x-p)$$

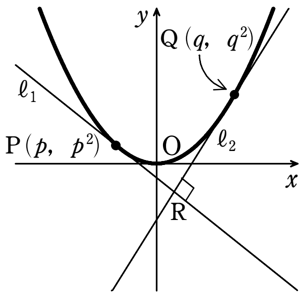
すなわち　$y=m(x-p)+p^2$

これと $y=x^2$ を連立して　$x^2=m(x-p)+p^2$

整理すると　$x^2-mx+mp-p^2=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4(mp-p^2)=(m-2p)^2$$



接するとき，$D=0$ であるから　$(m-2p)^2=0$

よって　$m=2p$

したがって，ℓ_1 の方程式は

$y=2p(x-p)+p^2$　すなわち　$y=2px-p^2$　……①

同様にして，ℓ_2 の方程式は　$y=2qx-q^2$　……②

交点 R の座標 $(x,\ y)$ は，連立方程式①，②の解である。

y を消去して整理すると　$2(p-q)x=(p+q)(p-q)$

$p\fallingdotseq q$ ではないから…

$p \neq q$ であるから　$x=\dfrac{p+q}{2}$

これを①に代入して　$y=2p\cdot\dfrac{p+q}{2}-p^2=pq$

ここで，$\ell_1\perp\ell_2$ から　$2p\cdot 2q=-1$

よって，$pq=-\dfrac{1}{4}$ から　$y=-\dfrac{1}{4}$　……③

逆に，③が成り立つとき，p，q を2解とする2次方程式 $t^2-2xt-\dfrac{1}{4}=0$ の判別式を

D' とすると　$\dfrac{D'}{4}=(-x)^2-1\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=x^2+\dfrac{1}{4}$　よって　$D'>0$

ゆえに，任意の x に対して実数 p，q $(p\neq q)$ が存在する。

したがって，求める軌跡は　直線 $y=-\dfrac{1}{4}$

9

m が実数全体を動くとき，次の2直線の交点 P はどんな図形を描くか。

$mx-y=0$ ……①，　$x+my-m-2=0$ ……②

解答　円 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く

解説

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，x，y は①，②を同時に満たす。

[1]　$x\neq 0$ のとき

①から　$m=\dfrac{y}{x}$　　②に代入して　$x+\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y}{x}-2=0$

分母を払って　$x^2+y^2-2x-y=0$　……③

すなわち　$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

③において，$x=0$ とすると　$y=0,\ 1$

ゆえに，$x\neq 0$ のとき，点 P は円③から2点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を除いた図形上にある。

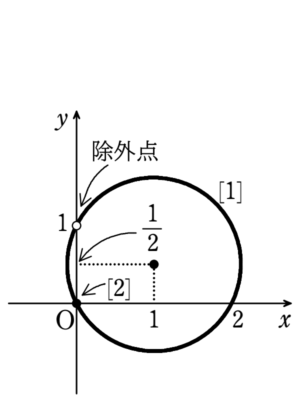
[2]　$x=0$ のとき　①から　$y=0$

$x=0$，$y=0$ を②に代入すると　$m=-2$

よって，点 $(0,\ 0)$ は $m=-2$ のときの2直線の交点である。

以上から，求める図形は

円 $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　ただし，点 $(0,\ 1)$ を除く。



10

x，y が3つの不等式 $3x-5y\geqq-16$，$3x-y\leqq 4$，$x+y\geqq 0$ を満たすとき，$2x+5y$ の最大値および最小値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=5$ のとき最大値 31；$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 -3

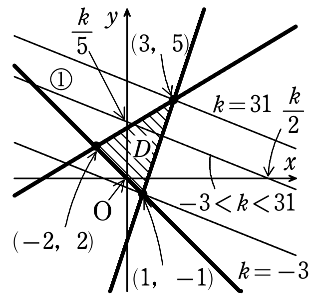
解説

与えられた連立不等式の表す領域を D とすると，領域 D は，3点 $(1,\ -1)$，$(-2,\ 2)$，$(3,\ 5)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$2x+5y=k$ ……①　とおくと，これは傾き $-\dfrac{2}{5}$，

y 切片 $\dfrac{k}{5}$ の直線を表す。

この直線①が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。



図から，k の値は，直線①が点 $(3,\ 5)$ を通るとき最大になり，点 $(1,\ -1)$ を通るとき最小になる。

よって，$2x+5y$ は

$x=3$，$y=5$　のとき最大値 $2\cdot3+5\cdot5=31$；

$x=1$，$y=-1$ のとき最小値 $2\cdot1+5\cdot(-1)=-3$　をとる。

11

連立不等式 $2x-3y\geqq-12$，$5x-y\leqq 9$，$x+5y\geqq 7$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A 上を動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

解答　$x=3$，$y=6$ のとき最大値 45；$x=\dfrac{7}{26}$，$y=\dfrac{35}{26}$ のとき最小値 $\dfrac{49}{26}$

解説

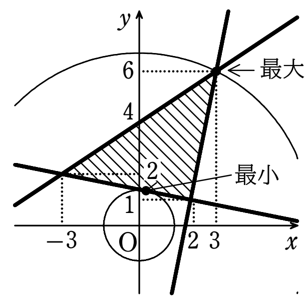
領域 A は，3点 $(3,\ 6)$，$(2,\ 1)$，$(-3,\ 2)$ を頂点とする三角形の周および内部である。

$x^2+y^2=k$ ……① とおくと

$k>0$ のとき，①は原点を中心とする半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

x^2+y^2 の値の範囲は，円①が領域 A と共有点をもつような k の値の範囲である。

図から，円①が点 $(3,\ 6)$ を通るとき，k の値は最大になり，その値は　$k=3^2+6^2=45$



また，円①が直線 $x+5y=7$ ……② に接するとき，k の値は最小になる。

①，②から x を消去して整理すると　$26y^2-70y+49-k=0$　……③

y の2次方程式③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-35)^2-26\cdot(49-k)=26k-49$$

円①が直線②に接するための条件は　$D=0$

よって，$26k-49=0$ から　$k=\dfrac{49}{26}$

このとき，③の重解は　$y=-\dfrac{-70}{2\cdot26}=\dfrac{35}{26}$

よって，②から　$x=7-5\cdot\dfrac{35}{26}=\dfrac{7}{26}$

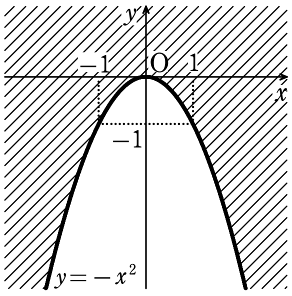
したがって　$x=3$，$y=6$ のとき最大値 45；

$x=\dfrac{7}{26}$，$y=\dfrac{35}{26}$ のとき最小値 $\dfrac{49}{26}$

12

直線 $y=2ax+a^2$ ……① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線 ① が通りうる領域を図示せよ。

解答 ［図］境界線を含む



解説

① を a について整理すると

$$a^2+2x\cdot a-y=0 \quad \cdots\cdots ②$$

直線 ① が点 $(x,\ y)$ を通るための条件は，a の 2 次方程式 ② が実数解をもつことである。

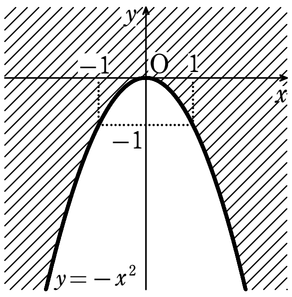
よって，2 次方程式 ② の判別式を D とすると　$D \geqq 0$

ここで　$\dfrac{D}{4}=x^2-1\cdot(-y)=x^2+y$

ゆえに，$x^2+y \geqq 0$ から　$y \geqq -x^2$

求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



別解　① において，$x=X$ のとき　$y=2aX+a^2$

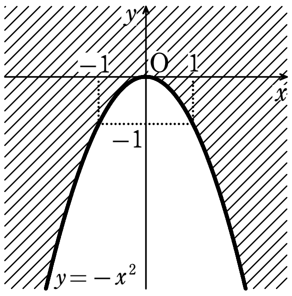
これを a の関数とみると　$y=(a+X)^2-X^2$

y は $a=-X$ のとき最小値 $-X^2$ をとるから，a がすべての実数値をとって動くとき　$y \geqq -X^2$

X はすべての実数値をとりうるから，X を x におき換えると　$y \geqq -x^2$

求める領域は，右の図の斜線部分。

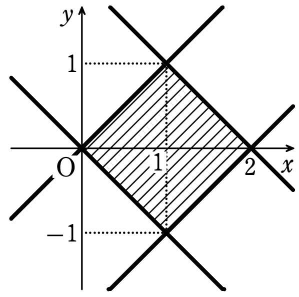
ただし，境界線を含む。



13

実数 $x,\ y$ が $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ x-y)$ の動く領域を図示せよ。

解答 ［図］境界線を含む



解説

$x+y=X,\ x-y=Y$ とおくと

$$x=\frac{X+Y}{2},\quad y=\frac{X-Y}{2}$$

$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ に代入すると

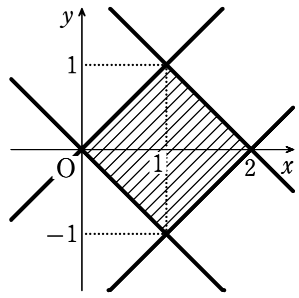
$$0 \leqq \frac{X+Y}{2} \leqq 1,\quad 0 \leqq \frac{X-Y}{2} \leqq 1$$

よって　$\begin{cases} -X \leqq Y \leqq -X+2 \\ X-2 \leqq Y \leqq X \end{cases}$

変数を $x,\ y$ におき換えて　$\begin{cases} -x \leqq y \leqq -x+2 \\ x-2 \leqq y \leqq x \end{cases}$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。

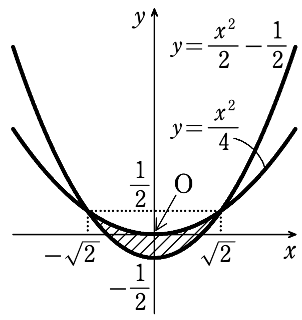
ただし，境界線を含む。



14

実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を図示せよ。

解答 ［図］境界線を含む



解説

$X=x+y,\ Y=xy$ とおく。

$x^2+y^2 \leqq 1$ から　$(x+y)^2-2xy \leqq 1$　すなわち　$X^2-2Y \leqq 1$

したがって　$Y \geqq \dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2}$　……①

また，$x,\ y$ は 2 次方程式 $t^2-(x+y)t+xy=0$ すなわち $t^2-Xt+Y=0$ の 2 つの実数解であるから，判別式を D とすると　$D \geqq 0$

ここで　$D=(-X)^2-4\cdot1\cdot Y=X^2-4Y$

よって，$X^2-4Y \geqq 0$ から　$Y \leqq \dfrac{X^2}{4}$　……②

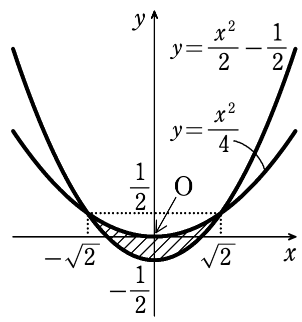
①，② から　$\dfrac{X^2}{2}-\dfrac{1}{2} \leqq Y \leqq \dfrac{X^2}{4}$

変数を $x,\ y$ におき換えて

$$\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4}$$

したがって，求める領域は，右の図の斜線部分。

ただし，境界線を含む。



1

点 P$(-5,\ 10)$ を通り，円 $x^2+y^2=25$ に接する直線の方程式を求めよ。

2

点$(5,\ 6)$から円 $x^2+y^2=9$ に引いた 2 つの接線の接点を P，Q とするとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

3

放物線 $y=x^2+a$ と円 $x^2+y^2=9$ について，次のものを求めよ。

(1)　この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2)　異なる 4 個の交点をもつような定数 a の値の範囲

$\boxed{4}$

(1)　円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=x+1$ の2つの交点と原点Oを通る円の方程式を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-2kx-4ky+16k-16=0$ は定数 k の値にかかわらず2点を通る。この2点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$

円 C_1： $x^2+y^2=4$ と円 C_2：$(x-5)^2+y^2=1$ の共通接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$

2点 A$(6,\ 0)$，B$(3,\ 3)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上を動く点Qを3つの頂点とする三角形の重心Pの軌跡を求めよ。

$\boxed{7}$

次の直線の方程式を求めよ。

(1)　2直線 $4x+3y-8=0$，$5y+3=0$ のなす角の二等分線

(2)　直線 ℓ：$x-y+1=0$ に関して直線 $2x+y-2=0$ と対称な直線

8

放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点 P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$ における接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とし，その交点を R とする。ℓ_1 と ℓ_2 が直交するように 2 点 P，Q が動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

9

m が実数全体を動くとき，次の 2 直線の交点 P はどんな図形を描くか。

$$mx-y=0 \ \cdots\cdots ①, \qquad x+my-m-2=0 \ \cdots\cdots ②$$

10

x，y が 3 つの不等式 $3x-5y \geqq -16$，$3x-y \leqq 4$，$x+y \geqq 0$ を満たすとき，$2x+5y$ の最大値および最小値を求めよ。

11

連立不等式 $2x-3y \geqq -12$，$5x-y \leqq 9$，$x+5y \geqq 7$ の表す領域を A とする。点 $(x,\ y)$ が領域 A 上を動くとき，x^2+y^2 の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。

12

直線 $y=2ax+a^2$ ……① について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線①が通りうる領域を図示せよ。

13

実数 x，y が $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ x-y)$ の動く領域を図示せよ。

14

実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変わるとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く領域を図示せよ。