高2文系数学　確認テスト　前期第7講　　　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿　　　得点　　/ 10

$\boxed{1}$

鋭角三角形 △ABC を底面とする四面体 ABCD において，$\mathrm{DA}=\dfrac{3\sqrt{55}}{11}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ であり，△ABC の外接円の中心 O と点 D を通る直線は，底面に垂直で

$\tan\angle\mathrm{DAO}=\sqrt{2}$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=-\dfrac{5}{6}$ を満たしているとする。

このとき，$\cos\angle\mathrm{DAO}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ となり，円 O の半径は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウエオ}}}}{11}$ となる。

また，$\mathrm{AB}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$，$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ で，$\mathrm{CA}=\boxed{\text{コ}}$ である。

したがって，△ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{2}$ である。さらに，四面体 ABCD の高さ DO は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{スセソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ であるから，体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ となる。

高2文系数学　確認テスト　前期第7講【解答】

$\boxed{1}$

解答　$\dfrac{\sqrt{(\text{ア})}}{(\text{イ})}$　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$\dfrac{\sqrt{(\text{ウエオ})}}{11}$　$\dfrac{\sqrt{165}}{11}$　　$\sqrt{(\text{カ})}$　$\sqrt{5}$　　$\dfrac{\sqrt{(\text{キク})}}{(\text{ケ})}$　$\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

(コ)　2　　$\dfrac{\sqrt{(\text{サシ})}}{2}$　$\dfrac{\sqrt{11}}{2}$　　$\dfrac{\sqrt{(\text{スセソ})}}{(\text{タチ})}$　$\dfrac{\sqrt{330}}{11}$　　$\dfrac{\sqrt{(\text{ツテ})}}{(\text{ト})}$　$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

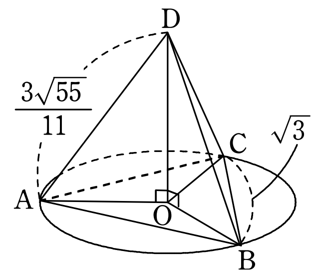
配点　アイ：2点，ウ～オ：1点，カ：1点，キ～ケ：1点，コ：2点，サシ：1点
ス～チ：1点，ツ～ト：1点，計10点

$\boxed{1}$

解説

$1+\tan^2\angle\mathrm{DAO}=\dfrac{1}{\cos^2\angle\mathrm{DAO}}$ から

$$\cos^2\angle\mathrm{DAO}=\frac{1}{3}$$



$\triangle\mathrm{DAO}$ において，$\angle\mathrm{DOA}=90°$ であるから

$$0°<\angle\mathrm{DAO}<90°$$

よって　$\cos\angle\mathrm{DAO}>0$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{DAO}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ア}}3}}{{}^{\text{イ}}3}$

よって，円 O の半径は　$\mathrm{OA}=\mathrm{DA}\cos\angle\mathrm{DAO}=\dfrac{3\sqrt{55}}{11}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ウエオ}}165}}{11}$

$\triangle\mathrm{OAB}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\times\cos\angle\mathrm{AOB}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{165}}{11}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{165}}{11}\right)^2-2\times\frac{\sqrt{165}}{11}\times\frac{\sqrt{165}}{11}\times\left(-\frac{5}{6}\right)=5$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　$\mathrm{AB}=\sqrt{{}^{\text{カ}}5}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に正弦定理を適用すると　$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\mathrm{OA}$

よって　$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2\mathrm{OA}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\times\dfrac{\sqrt{165}}{11}}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{キク}}33}}{{}^{\text{ケ}}6}$

$\mathrm{CA}=x$ とする．$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{CA}^2+\mathrm{CB}^2-2\times\mathrm{CA}\times\mathrm{CB}\times\cos\angle\mathrm{ACB}$$

ゆえに　$5=x^2+3-2\times x\times\sqrt{3}\times\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)^2}$

よって　$x^2-x-2=0$　　ゆえに　$(x+1)(x-2)=0$

$x>0$ であるから　$x=2$　　よって　$\mathrm{CA}={}^{\text{コ}}2$

したがって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{CA}\times\mathrm{CB}\times\sin\angle\mathrm{ACB}$

$$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{33}}{6}=\frac{\sqrt{{}^{\text{サシ}}11}}{2}$$

更に　$\mathrm{DO}=\mathrm{OA}\tan\angle\mathrm{DAO}=\dfrac{\sqrt{165}}{11}\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{スセソ}}330}}{{}^{\text{タチ}}11}$

ゆえに，体積は　$\dfrac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{DO}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{11}}{2}\times\dfrac{\sqrt{330}}{11}=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ツテ}}30}}{{}^{\text{ト}}6}$