1

(解説)

$X=k\ (1\leqq k\leqq 8)$ となるのは，k のカードと k より大きい番号のカードを引くときであり，その場合の数は　　$9-k$ (通り)

よって，$X=k$ となる確率 $P(X=k)$ は　　$P(X=k)=\dfrac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}$

同様に　　$P(Y=k)=\dfrac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}$

よって，$X=Y$ である確率は

$$\sum_{k=1}^{8}\{P(X=k)\times P(Y=k)\}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}\right)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2$$

$$=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$

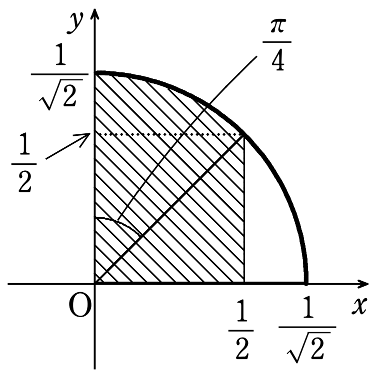
2

(解説)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x^2)'\cdot(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{6}$$



また，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積と等しいから

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}$$

したがって　　$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\left(-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{1}{6}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{\pi}{16}\right)$

$$=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{16}\pi$$

$\boxed{3}$

（解説）

(1)　割り算を実行すると，右のようになる。

　よって，商は　$x+5$，　　余りは　$-4x+6$

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x^2-2x \overline{\big) \, x^3+3x^2-14x+6} \\ \underline{x^3-2x^2 } \\ 5x^2-14x \\ \underline{5x^2-10x } \\ -4x+6 \end{array}$$

(2)　(1) より

$$x^3+3x^2-14x+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$$

　$x=a$ を代入すると

$$a^3+3a^2-14a+6=(a^2-2a)(a+5)-4a+6$$

　すなわち　　$X=Y(a+5)-4a+6$

　a について整理すると　　$(4-Y)a+X-5Y-6=0$

　a は無理数，X，Y は有理数であるから　　$4-Y=0$，　$X-5Y-6=0$

　よって　　　$X=26$，　$Y=4$

(3)　$Y=4$ から　　$a^2-2a=4$

　よって，$a^2-2a-4=0$ を解いて　　$a=1\pm\sqrt{5}$

　素数 5 の平方根 $\sqrt{5}$ は無理数であるから，$1\pm\sqrt{5}$ は無理数である。

　また，a は正の数であるから　　$a=1+\sqrt{5}$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　2 番の箱の白玉が $(q+1)$ 個になるのは，1 番の箱から白玉を取り出して移す場合であるから　　$a_2=q$

3 番の箱の白玉が $(q+1)$ 個になるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1]　1 番の箱から白玉，2 番の箱から白玉を取り出して移す。

[2]　1 番の箱から赤玉，2 番の箱から白玉を取り出して移す。

よって　　$a_3=q(q+1)+rq=q(q+r+1)$

(2)　1 番の箱から玉を取り出す場合の数は　　$(q+r)$ 通り　　　よって　　$s_2=q+r$

$n \geqq 3$ のとき，2，3，……，$(n-1)$ 番の箱から玉を取り出す場合の数は，それぞれ

$(q+r+1)$ 通り

ゆえに　　$s_n=(q+r)(q+r+1)^{n-2}$

この式は $n=2$ のときも成り立つ。

したがって　　$s_n=(q+r)(q+r+1)^{n-2}$

(3)　n 番の箱の玉は，白玉が $(q+1)$ 個，赤玉が r 個，または白玉が q 個，赤玉が $(r+1)$ 個のどちらかである。

よって，$(n+1)$ 番の箱の白玉が $(q+1)$ 個になる場合の数 a_{n+1} は

$$a_{n+1}=a_n\cdot(q+1)+(s_n-a_n)\cdot q$$

ゆえに　　$a_{n+1}-a_n=qs_n=q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$

(4)　(3) から，$n \geqq 3$ のとき

$$a_n=a_2+\sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=q+\sum_{k=2}^{n-1}q(q+r)(q+r+1)^{k-2}$$

$$=q+\frac{q(q+r)\{(q+r+1)^{n-2}-1\}}{(q+r+1)-1}=q+q\{(q+r+1)^{n-2}-1\}=q(q+r+1)^{n-2}$$

この式は $n=2$ のときも成り立つから　　$a_n=q(q+r+1)^{n-2}$

$\boxed{5}$

(解説)

△ABC の外心を通り，平面 ABC に垂直な直線を ℓ とする。

直線 ℓ 上の任意の点 P について，AP＝BP＝CP が成り立つ。

また，線分 AD の中点を通り，直線 AD に垂直な平面を α とする。

D は平面 ABC 上の点ではないから，α と ℓ は平行ではない。

よって，α と ℓ は 1 点で交わる。その交点を O とすると，OA＝OB＝OC＝OD である。

したがって，4 つの頂点 A，B，C，D は中心が O，半径が OA の球面上にある。