1

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ を求めよ。

解答　(1) $4\log\frac{4}{3}-1$　　(2) $\frac{256}{27e}$

解説

(1) $\displaystyle(与式)=\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx=\int_0^1\left\{3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\left[(3+x)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]_0^1-\int_0^1dx=4\log\frac{4}{3}-1$$

(2) $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ とおくと

$$a_n=3\times\sqrt[n]{\frac{3n+1}{3n}\cdot\frac{3n+2}{3n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3n+n}{3n}}$$

$$\log a_n=\log 3+\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}$$

$$=\log 3+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$$

であるから，(1) より

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log 3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\log 3+4\log\frac{4}{3}-1$$

$$=\log\left(3\cdot\frac{4^4}{3^4}\cdot\frac{1}{e}\right)=\log\frac{256}{27e}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{256}{27e}$

2

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$ を示せ。

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　　(2) 略

解説

(1) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき，$1\leqq1+x^4\leqq1+x^2$ が成り立つ。

ゆえに　$\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\leqq\frac{1}{1+x^4}\leqq1$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<\int_0^1dx$

$\displaystyle\int_0^1dx=\Big[x\Big]_0^1=1$ であるから　$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$

3

n は２以上の自然数とする。次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$$

解答　略

解説

自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{k}$

常に $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{x}$ または $\frac{1}{x}=\frac{1}{k}$ ではないから　$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{k}$

よって　$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$

$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{k}$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)$ であるから

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\quad\cdots\cdots①$$

$\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$ から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x}=\int_1^{n}\frac{dx}{x}=\Big[\log x\Big]_1^{n}=\log n$ であるから　$\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$

この不等式の両辺に 1 を加えて　$\displaystyle1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1\quad\cdots\cdots②$

よって，①，② から，$n\geqq2$ のとき　$\displaystyle\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$

4月22日(水)　高２理系数学総合S　　小テスト　　氏名【　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　】　　　　　　　　　　　　　点/10点

$\boxed{1}$

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ を求めよ。

$\boxed{2}$

(1)　定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(2)　不等式 $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$ を示せ。

$\boxed{3}$

n は２以上の自然数とする。次の不等式を証明せよ。

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n+1$$