$\boxed{1}$

(解説)

(1)　k を 2 以上の自然数とすると，この数列には分母が k である分数は $k-1$ 個含まれる。

$$1+2+3+4+5=15$$

であるから，a_{15} は分母が $5+1=6$ である分数のうち分子が最大のものである。

よって　$a_{15}=\dfrac{{}^{ア}5}{{}^{イ}6}$

分母が 7 以下の項は

$$\sum_{l=2}^{7}(l-1)=\sum_{l=1}^{6}l=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6+1)=21\ (個)$$

であるから，分母に初めて 8 が現れる項は　$a_{{}^{ウエ}22}$

(2)　(1)と同様に考えると，k が 3 以上のとき，分母が $k-1$ 以下の項の個数は

$\displaystyle\sum_{l=2}^{k-1}(l-1)$ であるから

$$M_k=\sum_{l=2}^{k-1}(l-1)+1=\sum_{l=1}^{k-2}l+1=\frac{1}{2}(k-2)\{(k-2)+1\}+1$$

$$=\frac{{}^{オ}1}{{}^{カ}2}k^2-\frac{{}^{キ}3}{{}^{ク}2}k+{}^{ケ}2$$

$$N_k=M_k+\{(k-1)-1\}=\frac{{}^{コ}1}{{}^{サ}2}k^2-\frac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2}k$$

これらは $k=2$ のときも成り立つ。

ここで，$N_{14}=\dfrac{1}{2}\cdot 14\cdot(14-1)=91$，$N_{15}=\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot(15-1)=105$ であるから　$a_{105}=\dfrac{14}{15}$

よって　$a_{104}=\dfrac{{}^{セソ}13}{{}^{タチ}15}$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項はすべて分母が k の分数であるから，その和は

$$\sum_{l=1}^{k-1}\frac{l}{k}=\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k-1}l=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}(k-1)\{(k-1)+1\}=\frac{{}^{ツ}1}{{}^{テ}2}k-\frac{{}^{ト}1}{{}^{ナ}2}$$

であるから，この数列の初項から第 N_k 項までの和 S_k は

$$S_k=\sum_{l=2}^{k}\left(\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{k}(l-1)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1}l$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(k-1)\{(k-1)+1\}=\frac{{}^{ニ}1}{{}^{ヌ}4}k^2-\frac{{}^{ネ}1}{{}^{ノ}4}k$$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{n=1}^{103} a_n=\sum_{n=1}^{105} a_n-(a_{104}+a_{105})=S_{15}-\left(\frac{13}{15}+\frac{14}{15}\right)$

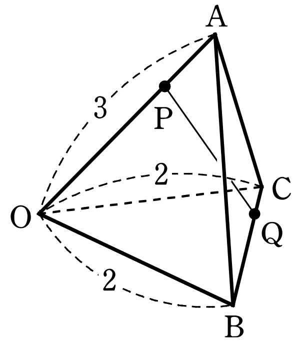
$$=\frac{1}{4}\cdot 15\cdot(15-1)-\frac{27}{15}=\frac{105}{2}-\frac{27}{15}=\frac{{}^{\text{ハヒフ}}507}{{}^{\text{ヘホ}}10}$$

$\boxed{2}$

(解説)

(1)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=2$，

$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{COA}=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{BOC}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=2$$

ゆえに　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}={}^{\text{ア}}3$，$\vec{b}\cdot\vec{c}={}^{\text{イ}}2$

よって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2=\left|-s\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right|^2$

$$=s^2\left|\vec{a}\right|^2+(1-t)^2\left|\vec{b}\right|^2+t^2\left|\vec{c}\right|^2-2s(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}-2st\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=9s^2+4(1-t)^2+4t^2-6s(1-t)+4t(1-t)-6st$$

$$=9s^2-6s+4t^2-4t+4$$

$$=({}^{\text{ウ}}3s-{}^{\text{エ}}1)^2+({}^{\text{オ}}2t-{}^{\text{カ}}1)^2+{}^{\text{キ}}2$$

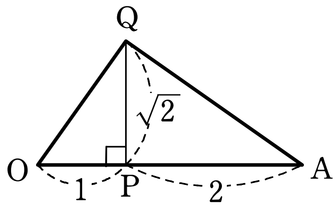
ゆえに，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$ が最小となるのは $s=\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}3}$，$t=\dfrac{{}^{\text{コ}}1}{{}^{\text{サ}}2}$ のときで，このとき　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\sqrt{{}^{\text{シ}}2}$

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|=\sqrt{2}$ のとき，(1)より　$s=\dfrac{1}{3}$，$t=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{a}\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3={}^{\text{ス}}0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから　$\angle\mathrm{APQ}={}^{\text{セソ}}90^\circ$



$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=3$ で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから

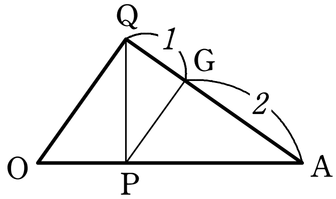
$$\mathrm{AP}=3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=2$$

したがって　$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{{}^{\text{タ}}2}$

点 G は △ABC の重心であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{{}^{\text{チ}}1}{{}^{\text{ツ}}3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{{}^{\text{テ}}2}{{}^{\text{ト}}3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$



ゆえに，点 G は線分 AQ を ${}^{\text{ナ}}2:1$ に内分する点である。

よって　　$\triangle\mathrm{GPQ}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{{}^{\text{ニ}}2}}{{}^{\text{ヌ}}3}$

$\boxed{3}$

(解説)

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，点 A の移動は次の 3 通り。

(i)　負の向きに 2 回移動する

このとき，$X=-1-1={}^{\text{ア}}-2$ で　$P(X=-2)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{\text{エ}}4}{{}^{\text{オ}}9}$

(ii)　正の向きと負の向きに 1 回ずつ移動する

このとき，$X=3-1={}^{\text{イ}}2$ で　$P(X=2)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{{}^{\text{カ}}4}{9}$

(iii)　正の向きに 2 回移動する

このとき，$X=3+3={}^{\text{ウ}}6$ で　$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{\text{キ}}1}{9}$

(2)　n 回移動して，正の向きに移動した回数が Y であるから

$$X=3Y+(-1)\cdot(n-Y)={}^{\text{ク}}-n+{}^{\text{ケ}}4Y$$

また，1 回ごとの移動は独立であるから，確率変数 Y は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。
ゆえに，Y の平均と分散は

$$E(Y)=np\quad\left({}^{\text{コ}}⓪\right)$$

$$V(Y)=np(1-p)\quad\left({}^{\text{サ}}①\right)$$

よって，X の平均と分散は

$$E(X)=E(-n+4Y)=4E(Y)-n=4np-n\quad\left({}^{\text{シ}}⑨\right)$$

$$V(X)=V(-n+4Y)=4^2V(Y)=16np(1-p)\quad\left({}^{\text{ス}}⑧\right)$$

(3)　(2) の結果に $p=\frac{1}{4}$，$n=1200$ を代入すると，

Y の平均は　$1200\cdot\dfrac{1}{4}={}^{セソタ}300$

Y の標準偏差は　$\sqrt{1200\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(1-\dfrac{1}{4}\right)}=\sqrt{1200\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}}={}^{チツ}15$

このとき，$X=-1200+4Y$ であるから，$X\geqq 120$ に代入すると

$$-1200+4Y\geqq 120$$

ゆえに　$Y\geqq 330$

よって　$\dfrac{Y-300}{15}\geqq\dfrac{330-300}{15}=2.00$

ゆえに　$P(X\geqq 120)=P\left(\dfrac{Y-300}{15}\geqq {}^{テ}2.{}^{トナ}00\right)$

ここで，$n=1200$ は十分に大きいので，確率変数 $\dfrac{Y-300}{15}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，求める確率の近似値は正規分布表から

$$P\left(\frac{Y-300}{15}\geqq 2.00\right)=P(Z\geqq 2.00)=0.5-0.4772=0.0228$$

したがって　$0.{}^{ニヌネ}023$

(4)　2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ であるから，(2) より

$$1440=-2400+4y$$

ゆえに　$y=960$

したがって，標本比率 r は　$r=\dfrac{960}{2400}=0.4$

ゆえに，求める信頼区間は

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}\leqq p\leqq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}$$

ここで　$1.96\sqrt{\dfrac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}=1.96\cdot 0.01=0.0196$

であるから

$$0.4-0.0196\leqq p\leqq 0.4+0.0196$$

$$0.3804\leqq p\leqq 0.4196$$

ゆえに　$0.{}^{ノハヒ}380\leqq p\leqq 0.{}^{フヘホ}420$

参考　n が十分に大きいならば，確率変数 R は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うことから

$$W=\frac{R-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表から

$$P(|W|\leqq 1.96)=2P(0\leqq W\leqq 1.96)=2\cdot 0.4750=0.95$$

ゆえに，p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\leqq p\leqq r+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

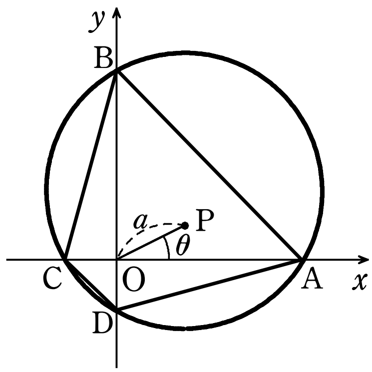
$n=2400$ が十分に大きいので大数の法則から，求める信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}\leqq p\leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$

$\boxed{4}$

解説

(1)　条件から　$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおける．



よって，円の方程式は

$(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=1$ となるから，

A, C の x 座標は $(x-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta=1$ を満たす．

$x=a\cos\theta\pm\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}$ であるから，

AC の長さは $2\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}$

同様に，B, D の y 座標は $a^2\cos^2\theta+(y-a\sin\theta)^2=1$

満たすことから，BD の長さは $2\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-a^2\sin^2\theta}\cdot 2\sqrt{1-a^2\cos^2\theta}=2\sqrt{1-a^2+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$

(2)　$\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\theta$ であるから

$2\theta=90^\circ$ すなわち $\theta=45^\circ$ のとき S は最大となる．

このとき　$S=2\sqrt{1-a^2+\dfrac{1}{4}a^4}=2-a^2$　$(0<a<1$ から$)$