

1

a を正の実数とする。このとき、実数 x に関する次の条件 p , q , r を考える。

$$p: |x-1| \leq a, \quad q: |x| \leq \frac{5}{2}, \quad r: x^2 - 2x \leq a$$

- (1) 次の , に当てはまるものを、下の ① ~ ③ のうちからそれぞれ一つ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

$a=1$ のとき、 p は q であるための 。また、 $a=3$ のとき、 p は q であるための .

- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ② 十分条件であるが、必要条件ではない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

- (2) 命題「 $p \implies q$ 」が真となるような a の最大値は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。

また、命題「 $q \implies p$ 」が真となるような a の最小値は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。

- (3) 命題「 $r \implies q$ 」が真となるような a の最大値は $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である。

2

$\triangle ABC$ において、 $AB = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 、 $AC = \frac{1}{3}$ 、 $\sin \angle ACB = \frac{3}{5}$ とする。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の半径は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

$\cos \angle ACB = \pm \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ であるから、 $BC = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ または $BC = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(2) 以下では $BC = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ とする。

このとき、 $\tan \angle ACB = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。また、

$\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である。

$\triangle ABC$ の外接円の、点 A での接線と点 B での接線の交点を P とし、点 A での接線と点 C での接線の交点を Q とする。 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とし、線分 OP と辺 AB の交点を R、線分 OQ と辺 AC の交点を S とする。このとき、 $\angle AOB$ と $\angle ACB$

の関係から $\tan \angle AOP = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ 、 $AP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

また、四角形 ORAS の内角 $\angle ROS$ については、 $\cos \angle ROS = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

高校生の K さんは、ニュースで「為替レート (1 米ドルは何円か)」および「日経平均株価」と呼ばれている数値が日々変化していることに興味をもったので、これらの数値を入手して調べてみることにした。

為替レートを 100 で割ったものを X とする。例えば、1 米ドルが 123 円の時 X は 1.23 となる。また、日経平均株価を 10,000 で割ったものを Y とする。例えば、日経平均株価が 16,500 円の時 Y は 1.65 となる。

図 1 は、 X 、 Y の日々の変化を描いたものである。ただし、土曜日、日曜日、祝日などデータのない日は除いている。全期間を次の二つの期間に分けて考察する。

期間 A : 2013 年 1 月 4 日 ~ 2014 年 11 月 28 日 (468 日分のデータ)

期間 B : 2014 年 12 月 1 日 ~ 2016 年 1 月 29 日 (284 日分のデータ)

図 2 は、期間 A と期間 B における X 、 Y のデータの散布図である。

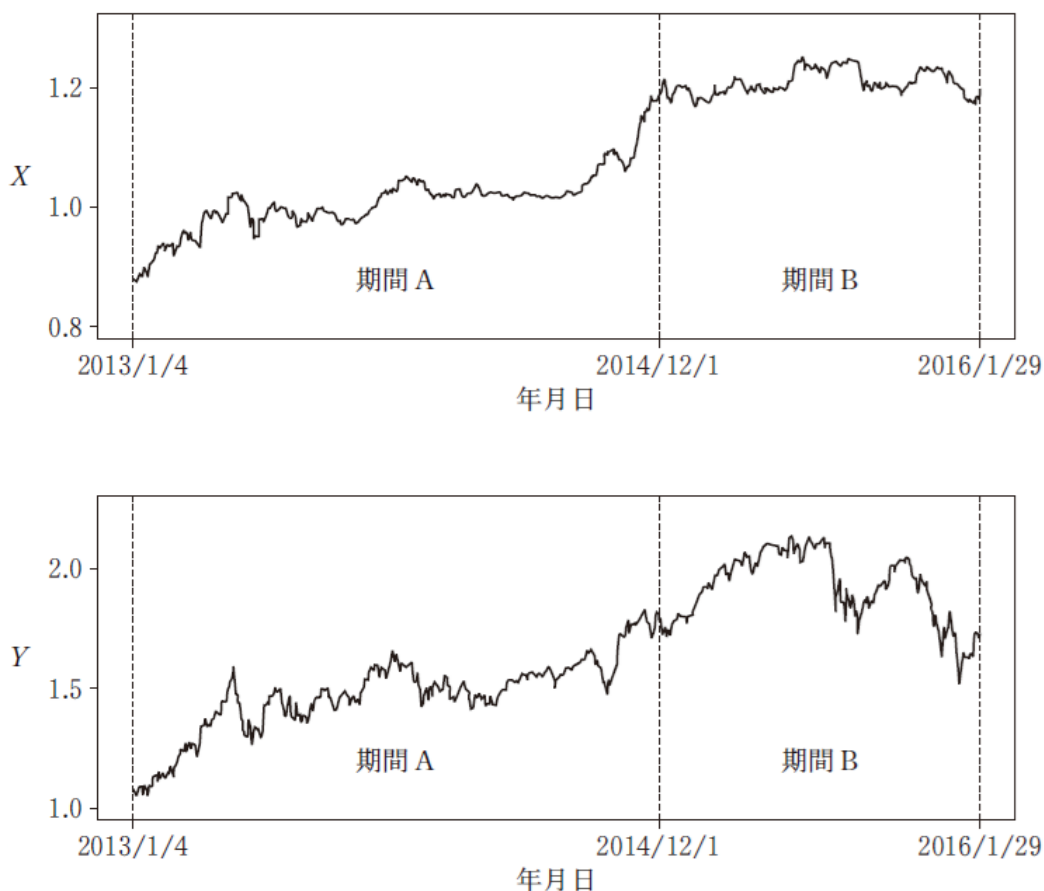


図 1 X 、 Y の日々の変化

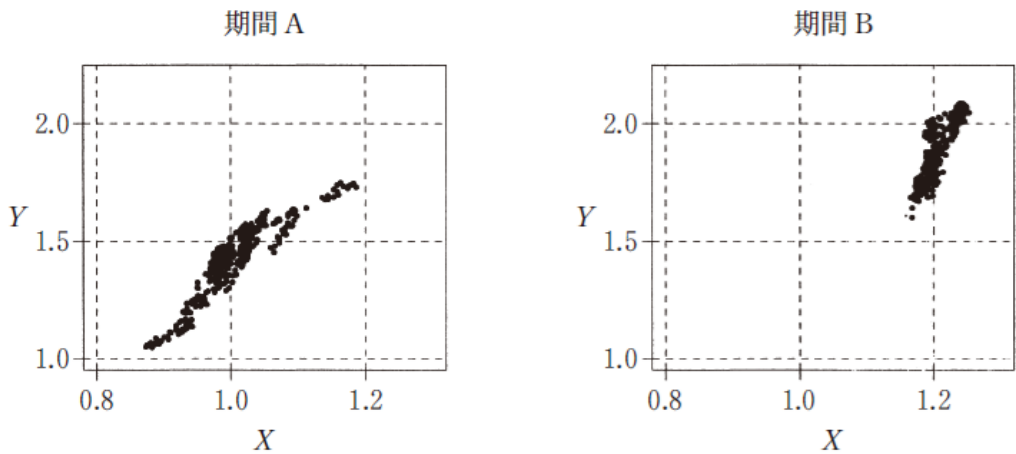


図2 X , Y のデータの散布図

- (1) 表1は、 X と Y について平均値、標準偏差および共分散を計算し、有効数字3桁で表したものである。ただし、 X と Y の共分散とは、 X の偏差と Y の偏差の積の平均値である。

表1 平均値、標準偏差および共分散

	期間 A	期間 B	全期間
X の平均値	1.01	1.21	1.08
Y の平均値	1.44	1.90	1.61
X の標準偏差	0.0522	0.0209	0.105
Y の標準偏差	0.144	0.118	0.260
X と Y の共分散	0.00685	0.00203	0.0263

次の に当てはまるものを、下の ①～⑤ のうちから一つ選べ。

表1を用いて、期間A、期間Bにおける X と Y の相関係数を求め、小数第3位を四捨五入すると、それぞれ0.91と0.82である。全期間における X と Y の相関係数を r とすると である。

- ① $r \leq 0$ ② $0 < r < 0.82$ ③ $r = 0.82$
 ④ $0.82 < r < 0.91$ ⑤ $r = 0.91$ ⑥ $0.91 < r$

- (2) X のデータの t 番目の値を x_t とする。期間Aに対応するのは $t=1, 2, \dots, 468$ であり、期間Bに対応するのは $t=469, 470, \dots, 752$ である。 X が日々どのように変化しているか調べるために、次の式によって定義される u_t を計算する。

$$u_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} \times 100$$

ただし、期間Aの最終日 ($t=468$) と期間Bの最終日 ($t=752$) については u_t を計算しない。 $u_1, \dots, u_{467}$ および $u_{469}, \dots, u_{751}$ を U のデータと呼ぶ。

図3および図4は、期間A、期間Bにおける U のデータのヒストグラムおよび箱ひげ図である。期間Aにおける中央値は0.0584であり、期間Bにおける中央値は0.0252

であった。

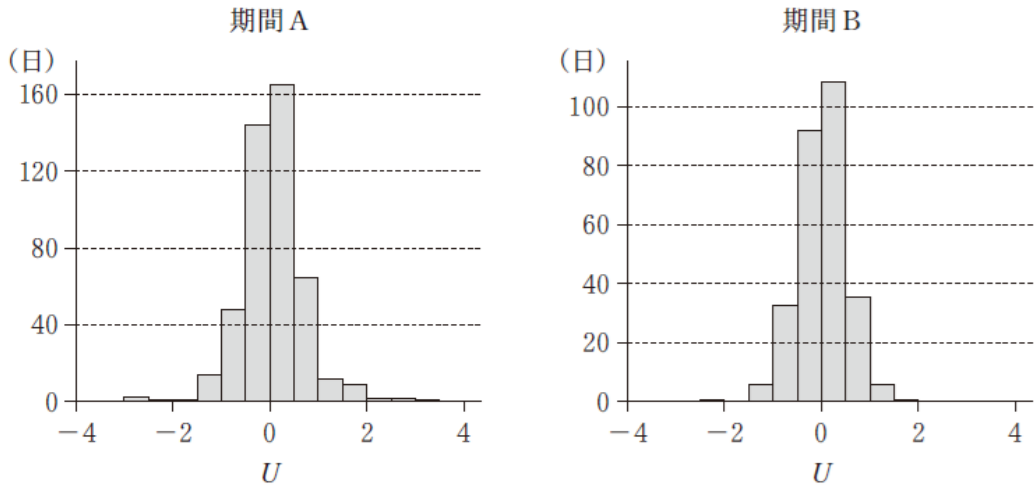


図3 U のデータのヒストグラム

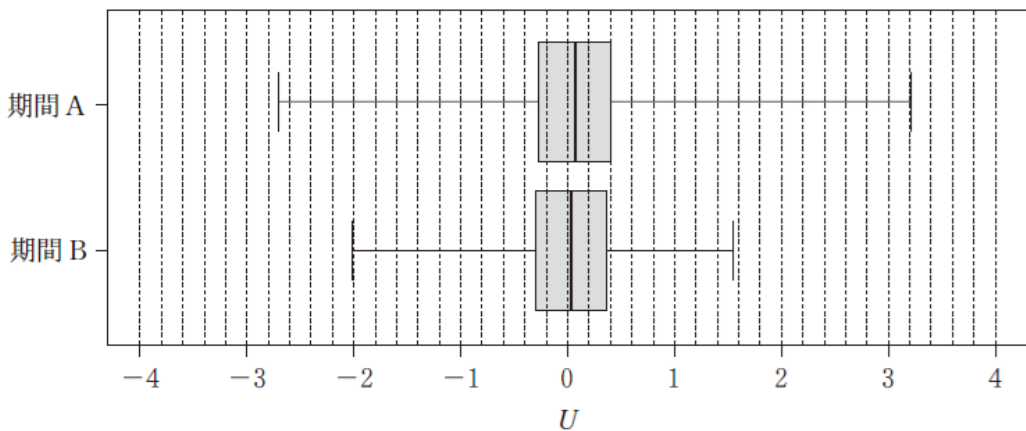


図4 U のデータの箱ひげ図

次の , に当てはまるものを, 下の ① ~ ⑥ のうちから一つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

図3および図4から U のデータについて読み取れることとして正しいものは, , である。

- ① 期間 A における最大値は, 期間 B における最大値より小さい。
- ② 期間 A における第1四分位数は, 期間 B における第1四分位数より小さい。
- ③ 期間 A における四分位範囲と期間 B における四分位範囲の差は 0.2 より大きい。
- ④ 期間 A における範囲は, 期間 B における範囲より小さい。
- ⑤ 期間 A, 期間 B の両方において, 四分位範囲は中央値の絶対値の 8 倍より大きい。
- ⑥ 期間 A において, 第3四分位数は度数が最大の階級に入っている。
- ⑦ 期間 B において, 第1四分位数は度数が最大の階級に入っている。

(3) X, Y から X', Y' を次の式によって定義する。

$$X' = aX + b, \quad Y' = cY + d$$

ただし, a, b, c, d は定数であり, $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする。

次の , , にそれぞれ当てはまるものを, 下の ① ~ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

・ X' の分散は, X の分散の 倍になる。

・ X' と Y' の共分散は, X と Y の共分散の 倍である。

・ X' と Y' の相関係数は, X と Y の相関係数の 倍である。

- | | | | | | |
|---|-------|---|-------------------|---|--------|
| ① | 1 | ④ | a | ⑦ | a^2 |
| ② | ac | ⑤ | $\frac{ac}{ ac }$ | ⑧ | b |
| ③ | b^2 | ⑥ | bd | | $ bd $ |

(4) 図 5 の三つの散布図について考える。散布図 1 で表される V と W の 2 種類のデータの相関係数, 散布図 2 で表される V' と W' の 2 種類のデータの相関係数, および散布図 3 で表される V'' と W'' の 2 種類のデータの相関係数をそれぞれ r_1, r_2 および r_3 とする。これらは, 小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めると, $-0.76, 0.10, 0.98$ のいずれかであることがわかっている。

次の に当てはまるものを, 下の ① ~ ⑤ のうちから一つ選べ。

r_1, r_2 および r_3 の値の組合せとして正しいものは である。

	①	②	③	④	⑤
r_1	-0.76	-0.76	0.10	0.10	0.98
r_2	0.10	0.98	-0.76	0.98	-0.76
r_3	0.98	0.10	0.98	-0.76	0.10

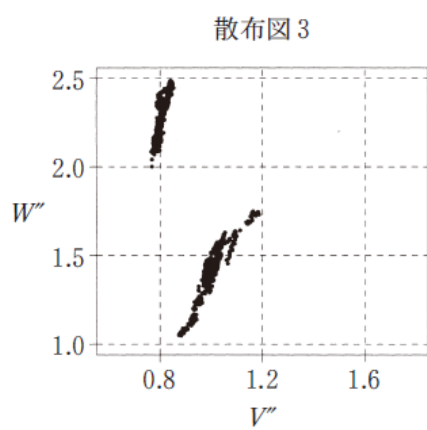
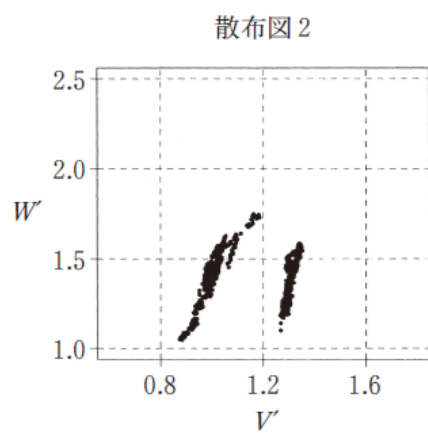
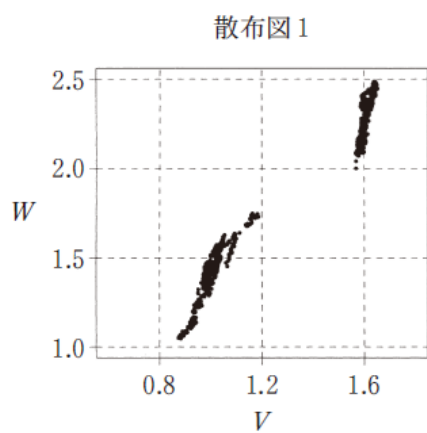


図 5 三つの散布図

4

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = a_1 a_2, \quad b_{n+1} - b_n = a_{n+1} a_{n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ。