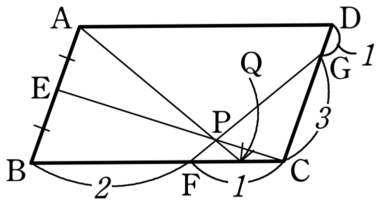
1

解説

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ とすると



$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$

EP：PC$=s:(1-s)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AE}+s\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}(1+s)\vec{a}+s\vec{b}$$

また，FP：PG$=t:(1-t)$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=(1-t)\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{AG}=(1-t)\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+t\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{4}t\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t\right)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$\frac{1}{2}(1+s)=1-\frac{3}{4}t,\ s=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t$$

これを解いて　　$s=\dfrac{8}{11}$，$t=\dfrac{2}{11}$　　よって　　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{19}{22}\vec{a}+\dfrac{8}{11}\vec{b}$

点Qは直線AP上にあるから　　$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$　(k は実数)

ゆえに　　$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{19}{22}k\vec{a}+\dfrac{8}{11}k\vec{b}=\dfrac{3}{22}k\vec{a}+\dfrac{8}{11}k(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{3}{22}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{11}k\overrightarrow{AC}$

点Qは直線BC上にあるから

$$\frac{3}{22}k+\frac{8}{11}k=1\qquad よって\qquad k=\frac{22}{19}$$

ゆえに　　AP：PQ$=19:3$

2

解説

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}(a\cos x+b)dx=\Big[a\sin x+bx\Big]_0^{\pi}=b\pi$

　また　　$\{f(x)\}^3=(a\cos x+b)^3$

$$=a^3\cos^3x+3a^2b\cos^2x+3ab^2\cos x+b^3$$

$$=a^3(1-\sin^2x)\cos x+3a^2b\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+3ab^2\cos x+b^3$$

$$=a^3(\cos x-\sin^2 x\cos x)+\frac{3}{2}a^2b\cos 2x+3ab^2\cos x+\frac{3}{2}a^2b+b^3$$

したがって

$$\int_0^\pi\{f(x)\}^3dx=\left[a^3\left(\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\right)+\frac{3}{4}a^2b\sin 2x+3ab^2\sin x+\left(\frac{3}{2}a^2b+b^3\right)x\right]_0^\pi$$

$$=\left(\frac{3}{2}a^2b+b^3\right)\pi$$

よって，与式から　　$b\pi=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{3}{2}a^2b+b^3\right)\pi$

整理すると　　$6a^2b+4b^3-4b+1=0$　…… ①

(2)　① を変形すると　　$6a^2b=-4b^3+4b-1$

$b>0$ のとき，両辺を b で割ると　　$6a^2=-4b^2+4-\frac{1}{b}$　…… ②

よって，② を満たす正の数 b が存在するための a の条件を求めればよい。

$g(b)=-4b^2+4-\frac{1}{b}$ とおく。

② を満たす正の数 b が存在することは，$y=g(b)$ のグラフと直線 $y=6a^2$ が $b>0$ の範囲で共有点をもつことと同値である。

$$g'(b)=-8b+\frac{1}{b^2}=-\frac{8}{b^2}\left(b^3-\frac{1}{8}\right)$$

$g'(b)=0$ とすると　　$b=\frac{1}{2}$

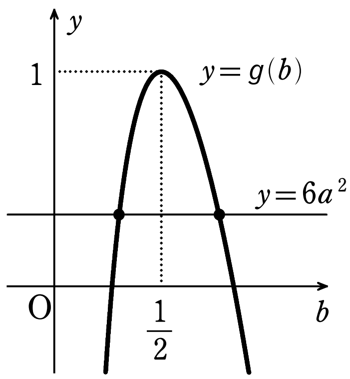
$b>0$ における $g(b)$ の増減表は右のようになる。

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(b)$		$+$	0	$-$
$g(b)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

また　　$\lim_{b\to+0}g(b)=-\infty$

$\lim_{b\to\infty}g(b)=-\infty$

したがって，$y=g(b)$ のグラフは右の図のようになる。



ゆえに，求める a の条件は　　$6a^2\leqq 1$

これを解いて　　$-\frac{\sqrt{6}}{6}\leqq a\leqq\frac{\sqrt{6}}{6}$

3

解説

(1)　$z=\frac{w-1}{w+1}$　…… ① とする。

$z=1$ は ① を満たさないから　　$z\neq 1$

① より　　$(1-z)w=1+z$

$z \neq 1$ より　　$w=\dfrac{1+z}{1-z}$　……②

$w=s+ti$，$z=x+yi$ を ② に代入すると

$$s+ti=\frac{(1+x)+yi}{(1-x)-yi}=\frac{\{(1+x)+yi\}\{(1-x)+yi\}}{\{(1-x)-yi\}\{(1-x)+yi\}}$$

$$=\frac{1-x^2-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

s，t，x，y は実数であるから，両辺の実部と虚部を比較して

$$s=\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2},\quad t=\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

(2)　(1) より，$0 \leqq s \leqq 1$ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ であるとき

$$0 \leqq \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \leqq 1,\quad 0 \leqq \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \leqq 1$$

$(x-1)^2+y^2>0$ であるから　　$0 \leqq 1-x^2-y^2 \leqq (x-1)^2+y^2$　……③

$0 \leqq 2y \leqq (x-1)^2+y^2$　……④

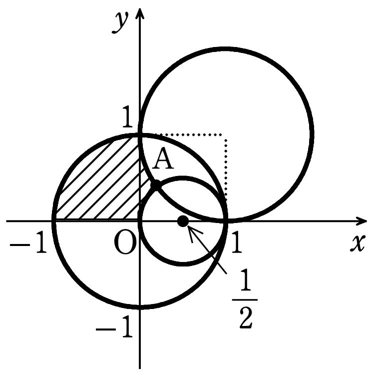
③ から　　$x^2+y^2 \leqq 1$　……⑤

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2 \geqq \dfrac{1}{4}$　……⑥

④ から　　$y \geqq 0$　……⑦

$(x-1)^2+(y-1)^2 \geqq 1$　……⑧

したがって，求める範囲 D は ⑤ ～ ⑧ の共通部分であるから，右の図の斜線部分である。
ただし，境界線を含む。



(3)　$-5x+y=k$　……⑨ とおくと，⑨ は傾き 5，y 切片 k の直線を表す。

円 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ と 円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ の交点のうち，点 $(1,\ 0)$ でないものを A とすると，(2) の図から，直線 ⑨ が原点か点 A を通るとき，k の値は最小となる。

[1]　原点を通るとき

⑨ に $x=0$，$y=0$ を代入して　　$k=0$

[2]　点 A を通るとき

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$　……⑩

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$　……⑪

とする。

⑩−⑪ より　　$x+2y-1=0$　　　すなわち　　$x=1-2y$

これを ⑪ に代入して整理すると

$5y^2-2y=0$　　すなわち　$y(5y-2)=0$

これを解くと　$y=0,\ \dfrac{2}{5}$

よって，点 A の座標は　$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

したがって，⑨ に $x=\dfrac{1}{5}$，$y=\dfrac{2}{5}$ を代入して　$k=-\dfrac{3}{5}$

[1]，[2] より，$-5x+y$ の最小値は　$-\dfrac{3}{5}$

$\boxed{4}$

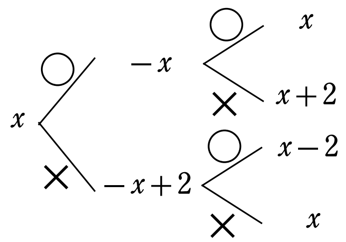
(解説)

表を ○，裏を × で表して考える。

(1)　座標 x の点を，座標 1 の点に関して対称移動した点の座標を y とすると

$$\frac{x+y}{2}=1 \qquad よって \qquad y=-x+2$$

ゆえに，2 回硬貨を投げたときの座標の推移は右のようになる。



よって，求める確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\times 2=\dfrac{1}{2}$

(2)　$2n$ 回硬貨を投げたときの ○，× を左から順に並べる。

また，各回の試行は独立であるから，$2n$ 回の試行を 2 回ごとに区切って考える。

このとき，s，t を 0 以上の整数として，「○ ×」と並ぶ箇所が s 個，「× ○」と並ぶ箇所が t 個とする。

(1) の座標の推移から

$2\cdot s+(-2)\cdot t=2n-2$　……①，

$s+t\leqq n$　……②

① から　$s=t+n-1$

② に代入して　$2t+n-1\leqq n$

ゆえに　$2t\leqq 1$

t は 0 以上の整数であるから　$t=0$

よって　$s=n-1$

ゆえに，「○ ×」と並ぶ箇所が $(n-1)$ 個，「○ ○」または「× ×」と並ぶ箇所が 1 個となる。

よって，求める確率は　${}_n\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{n}{2^{2n-1}}$