$\boxed{1}$ [2025 神戸大]

0，1，2，3，4 の数字を 1 つずつ書いた合計 5 枚のカードが袋の中にある。この袋からカードを 1 枚取り出し，書かれている数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返して行うとき，n 回目に取り出したカードに書かれている数字を a_n とする。S_n を $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ で定め，S_n を 3 で割った余りが 0 となる確率を x_n，S_n を 3 で割った余りが 1 となる確率を y_n，S_n を 3 で割った余りが 2 となる確率を z_n とする。

(1) x_{n+1}，y_{n+1}，z_{n+1} をそれぞれ x_n，y_n を用いて表せ。

(2) x_{n+3} を x_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$を $b_n=x_{3n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

解答 (1) $x_{n+1}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}y_n$，$y_{n+1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}x_n+\dfrac{1}{5}y_n$，$z_{n+1}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}x_n$

(2) $x_{n+3}=\dfrac{42}{125}-\dfrac{1}{125}x_n$　(3) $b_n=\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{125}\right)^n+\dfrac{1}{3}$

解説

(1) 確率 x_{n+1} について，S_{n+1} を 3 で割った余りが 0 となるのは，次の場合がある。

[1] S_n を 3 で割った余りが 0 で，$n+1$ 回目に 0 または 3 のカードを取り出す場合

この確率は　$x_n\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}x_n$

[2] S_n を 3 で割った余りが 1 で，$n+1$ 回目に 2 のカードを取り出す場合

この確率は　$y_n\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}y_n$

[3] S_n を 3 で割った余りが 2 で，$n+1$ 回目に 1 または 4 のカードを取り出す場合

この確率は　$z_n\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{2}{5}z_n$

$x_n+y_n+z_n=1$ であるから　$z_n=1-x_n-y_n$

よって，[3] の確率は　$\dfrac{2}{5}(1-x_n-y_n)$

[1]～[3] は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=\frac{2}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n+\frac{2}{5}(1-x_n-y_n)\\&=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}y_n\end{aligned}$$

同様に，確率 y_{n+1} について，S_{n+1} を 3 で割った余りが 1 となるのは，次の場合がある。

[4] S_n を 3 で割った余りが 0 で，$n+1$ 回目に 1 または 4 のカードを取り出す場合

この確率は　$\dfrac{2}{5}x_n$

[5] S_n を 3 で割った余りが 1 で，$n+1$ 回目に 0 または 3 のカードを取り出す場合

この確率は　$\dfrac{2}{5}y_n$

[6] S_n を 3 で割った余りが 2 で，$n+1$ 回目に 2 のカードを取り出す場合

この確率は　$\dfrac{1}{5}z_n=\dfrac{1}{5}(1-x_n-y_n)$

[4]～[6] は互いに排反であるから

$$y_{n+1}=\frac{2}{5}x_n+\frac{2}{5}y_n+\frac{1}{5}(1-x_n-y_n)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n$$

また

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=1-x_{n+1}-y_{n+1}\\&=1-\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}y_n\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}x_n+\frac{1}{5}y_n\right)\\&=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}x_n\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}x_{n+3}&=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}y_{n+2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{25}(1+x_{n+1}+y_{n+1})\\&=\frac{2}{5}-\frac{1}{25}\{1+(1-z_{n+1})\}=\frac{2}{5}-\frac{1}{25}\left(\frac{8}{5}+\frac{1}{5}x_n\right)\\&=\frac{42}{125}-\frac{1}{125}x_n\end{aligned}$$

(3) (2) より

$$x_{3n+3}=\frac{42}{125}-\frac{1}{125}x_{3n}$$

すなわち

$$b_{n+1}=\frac{42}{125}-\frac{1}{125}b_n$$

変形すると

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{125}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

ここで，$b_1=x_3$ であり

$$x_1=\frac{2}{5},\quad y_1=\frac{2}{5},\quad y_2=\frac{1}{5}(1+x_1+y_1)=\frac{9}{25},$$

$$x_3=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}y_2=\frac{41}{125}$$

よって

$$b_1-\frac{1}{3}=\frac{41}{125}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{375}$$

したがって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は初項 $-\dfrac{2}{375}$，公比 $-\dfrac{1}{125}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}b_n-\frac{1}{3}&=-\frac{2}{375}\cdot\left(-\frac{1}{125}\right)^{n-1}\\&=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{125}\right)^n\end{aligned}$$

ゆえに

$$b_n=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{125}\right)^n+\frac{1}{3}$$

添削課題 6月24日(水)

$\boxed{2}$ [2021 北海道大]

座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=\sin\theta \quad (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) $a=-\dfrac{1}{4}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{6}$

解説

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$

$=-2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると　$\sin\theta=0$ または $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ であるから　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

よって，x の増減表は右のようになる。

したがって，求める x 座標の最小値は　$a=-\dfrac{1}{4}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

別解　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

よって，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，最小値 $-\dfrac{1}{4}$ となる。

(2) $y=\sin\theta$ から　$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta$　　$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって，θ の値の変化に対応した，x，y の値の変化は，次の表のようになる。

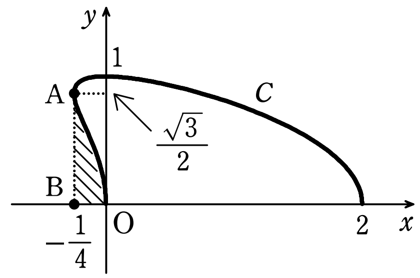
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	$\leftarrow$	0	$\leftarrow$	$-\frac{1}{4}$	$\rightarrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
y	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	0

したがって，曲線 C のグラフは右のようになり，

$\mathrm{A}\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-\dfrac{1}{4},\ 0\right)$ であるから，

線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分は，

斜線部分のようになる。



ゆえに，求める面積 S は

$$S=\int_{-\frac{1}{4}}^{0}y\,dx=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta\{-\sin\theta(2\cos\theta+1)\}d\theta$$

$$=-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}2\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta=-\left[\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}-\frac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(1-\cos2\theta)d\theta$$

$$=-\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right\}-\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\left\{\pi-\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}$$

添削課題 6月24日(水)

$\boxed{1}$ [2025 神戸大]

0，1，2，3，4の数字を1つずつ書いた合計5枚のカードが袋の中にある。この袋からカードを1枚取り出し，書かれている数字を調べてからもとに戻す。この試行を繰り返して行うとき，n 回目に取り出したカードに書かれている数字を a_n とする。S_n を $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ で定め，S_n を3で割った余りが0となる確率を x_n，S_n を3で割った余りが1となる確率を y_n，S_n を3で割った余りが2となる確率を z_n とする。

(1)　x_{n+1}，y_{n+1}，z_{n+1} をそれぞれ x_n，y_n を用いて表せ。

(2)　x_{n+3} を x_n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=x_{3n}$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ により定める。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

2 [2021 北海道大]

座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ \ y=\sin\theta\ \ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。