1

解説

(1)　h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2h}(2ah+h^2)={}^{ア}a+\frac{h}{{}^{イ}2}$$

したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to{}^{ウ}0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(a+\frac{h}{2}\right)={}^{エ}a$$

(2)　放物線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}a^2=f'(a)(x-a)$$

(1) より，$f'(a)=a$ であるから　　$y-\dfrac{1}{2}a^2=a(x-a)$

よって　　$y={}^{オ}ax-\dfrac{1}{{}^{カ}2}a^2$

$y=0$ とすると，$0=ax-\dfrac{1}{2}a^2$ より　　$ax=\dfrac{1}{2}a^2$

$a\fallingdotseq 0$ であるから　　$x=\dfrac{a}{2}$

したがって，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{{}^{キ}a}{{}^{ク}2},\ 0\right)$

点 Q を通り ℓ に垂直な直線 m の傾きを k とすると　　$k\cdot a=-1$

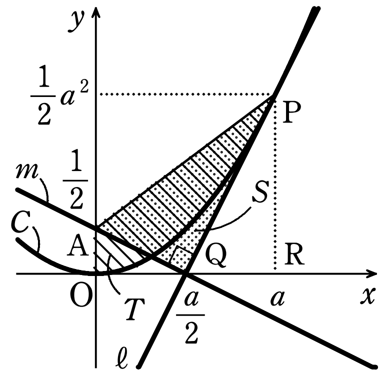
$a\fallingdotseq 0$ であるから　　$k=-\dfrac{1}{a}$

よって，直線 m の方程式は　　$y-0=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$

ゆえに　　$y=\dfrac{{}^{ケコ}-1}{{}^{サ}a}x+\dfrac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2}$

直線 m の y 切片は $\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 m と y 軸との交点 A の座標は　　$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

直線 ℓ と m は直交するから　　$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AQ}$



また　　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}a^2\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^2+a^4}{4}}=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$$

よって，三角形 APQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{a(a^2+{}^{\text{セ}}1)}{{}^{\text{ソ}}8}$$

点 P から x 軸に垂線 PR を下ろし，台形 OAPR の面積を U とすると

$$U=(\mathrm{OA}+\mathrm{PR})\cdot\mathrm{OR}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2\right)\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a(a^2+1)}{4}$$

y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T は

$$T=U-\int_0^a\frac{1}{2}x^2dx=U-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a(a^2+1)}{4}-\frac{a^3}{6}$$

$$=\frac{3a(a^2+1)-2a^3}{12}=\frac{a^3+3a}{12}=\frac{a(a^2+{}^{\text{タ}}3)}{{}^{\text{チツ}}12}$$

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}=\frac{3a(a^2+1)-2a(a^2+3)}{24}$$

$$=\frac{a^3-3a}{24}=\frac{a(a^2-{}^{\text{テ}}3)}{{}^{\text{トナ}}24}$$

$a>0$ の範囲で $S-T>0$ となるための条件は　　$a^2-3>0$

これを解くと，$a>0$ であるから　　$a>\sqrt{{}^{\text{ニ}}3}$

$g(a)=a(a^2-3)$ とおくと　　$g'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

$g'(a)=0$ とすると　　$a=\pm1$

$a>0$ における $g(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		↘	極小 -2	↗

よって，$g(a)$ は $a=1$ で最小値 -2 をとる。

したがって，$S-T$ は

$$a={}^{\text{ヌ}}1 \text{ で最小値 } -\frac{2}{24}=\frac{{}^{\text{ネノ}}-1}{{}^{\text{ハヒ}}12} \text{ をとる。}$$

別解　(三角形 APQ の面積 S)

直線 ℓ と y 軸の交点をUとすると，Uの座標は

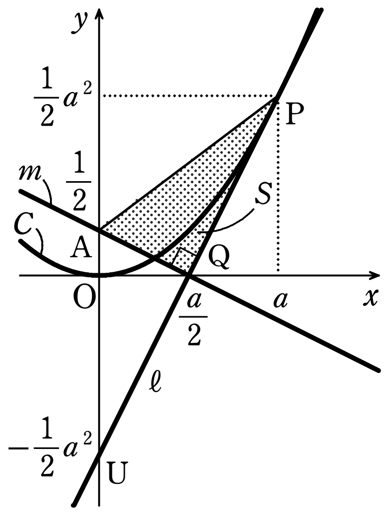
$$\left(0,\ -\frac{1}{2}a^2\right)$$

三角形 APQ の面積 S は

$S=$(三角形 APU の面積)$-$(三角形 AQU の面積)

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot a-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\right)(2-1)=\frac{a(a^2+{}^{セ}1)}{{}^{ソ}8}$$



$\boxed{2}$

(解説)

(1)　X は正規分布 $N(95,\ 20^2)$ に従うから，$Z=\dfrac{X-{}^{アイ}95}{{}^{ウエ}20}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$$P(X\geqq 100)=P\left(Z\geqq\frac{100-95}{20}\right)=P(Z\geqq {}^{オ}0.{}^{カキ}25)=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.25)$$

ここで，確率 $P(0\leqq Z\leqq z_0)$ を $p(z_0)$ で表すことにすると，Z は $N(0,\ 1)$ に従うから

正規分布表により　　$p(0.25)=0.0987$

よって　　$P(X\geqq 100)=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.25)=0.5-p(0.25)$

$=0.5-0.0987=0.4013$

$0.4013\times 100=40.13$ より，合格率は約 ${}^{クケ}40$ % である。

次に，$P(Z\geqq u)=0.1$ となる u の値を求める。

ここで　　$P(Z\geqq u)=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq u)=0.5-p(u)$

よって，$0.5-p(u)=0.1$ により　　$p(u)=0.4$

正規分布表により　　$u\fallingdotseq 1.28$

ゆえに　　$P(Z\geqq 1.28)=0.4$

$\dfrac{X-95}{20}\geqq 1.28$ から　　$X\geqq 120.6$

したがって，点数が受験者数全体の上位 10 % に入る受験者の最低点はおよそ 121 点であるから　　^{コ}①

(2)　Y は二項分布 $N\left(19,\ \dfrac{10}{100}\right)$ に従うから，Y の期待値は　　$19\cdot\dfrac{10}{100}={}^{サ}1.{}^{シ}9$

また，分散は　　$19\cdot\dfrac{10}{100}\cdot\left(1-\dfrac{10}{100}\right)={}^{ス}1.{}^{セソ}71$

更に，$p_1={}_{19}\mathrm{C}_1\left(\dfrac{10}{100}\right)^1\left(\dfrac{90}{100}\right)^{18}$，$p_2={}_{19}\mathrm{C}_2\left(\dfrac{10}{100}\right)^2\left(\dfrac{90}{100}\right)^{17}$ であるから

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{{}_{19}\mathrm{C}_1\left(\frac{10}{100}\right)^1\left(\frac{90}{100}\right)^{18}}{{}_{19}\mathrm{C}_2\left(\frac{10}{100}\right)^2\left(\frac{90}{100}\right)^{17}}=\frac{\frac{19}{1}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{19\cdot 18}{2\cdot 1}\cdot\frac{10}{100}}=1$$

よって　　^{タ}②

(3)　母平均を m とする。

標本の大きさは 96 名，標本平均の値は 99 点，母標準偏差の値が 20 点であるとすると，標本平均の分布は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{20^2}{96}\right)$ に従う。

よって，m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$99-1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{96}}\leqq m\leqq 99+1.96\cdot\frac{20}{\sqrt{96}}$$

すなわち　$$99-1.96\cdot\frac{20}{4\sqrt{6}}\leqq m\leqq 99+1.96\cdot\frac{20}{4\sqrt{6}}$$

$\sqrt{6}=2.45$ とするから　$^{チツ}95\leqq m\leqq {}^{テトナ}103$

また，信頼区間の幅は　$103-95={}^{ニ}8$

ただし，単位は　点

また，母標準偏差の値が 15 点であるとき，m に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅は

$$2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{\sqrt{96}}=2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{4\sqrt{6}}=2\cdot 1.96\cdot\frac{15}{4\cdot 2.45}={}^{ヌ}6$$

ただし，単位は　点

$\boxed{3}$

(解説)

(1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

よって　$f(x) = 4x^3 - 3x$, $g(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

(2) $\cos 3\alpha = \cos\dfrac{3\times 360°}{7} = \cos\left(360° - \dfrac{3\times 360°}{7}\right) = \cos\dfrac{4\times 360°}{7} = \cos 4\alpha$

また，$\cos 3\alpha = \cos 4\alpha$ から，(1) を用いると

$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

よって　$(\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1) = 0$

$0 < \cos\alpha < 1$ であるから　$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$

ゆえに，求める 1 つの 3 次式 $P(x)$ は　$P(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

(3) $0 < \cos\alpha < 1$, $P(\cos\alpha) = 0$ から，$0 < x < 1$ における $P(x)$ の増減を調べる．

$P'(x) = 24x^2 + 8x - 4$

$P'(x) = 0$, $0 < x < 1$ とすると　$x = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	1
$P'(x)$		$-$	0	$+$	
$P(x)$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	7

増減表は上のようになるから $P(x) = 0$ となる x は　$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < x < 1$

よって　$\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < \cos\alpha < 1$

ところで，$2.6 < \sqrt{7} < 2.7$ から　$0.2 < \dfrac{-1+\sqrt{7}}{6} < 0.3$

$P(0.3) = -1.624$, $P(0.4) = -1.448$, $P(0.5) = -1$, $P(0.6) = -0.232$, $P(0.7) = 0.904$ であるから　$0.6 < \cos\alpha < 0.7$

したがって，$\cos\alpha$ の小数第 1 位の値は　6