

1

(解説)

正の向きに x 回, 負の向きに y 回進むとする.

$$(1) \begin{cases} x+y=8 \cdots \cdots ① \\ x-y=2 \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$①, ② \text{ から } x=5, y=3$$

$$\text{よって } {}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}$$

$$(2) X(7) = x - y = x - (7 - x) = 2x - 7$$

$ X(7) $	1	3	5	7	計
確率	$\frac{{}_7C_3 + {}_7C_4}{2^7}$	$\frac{{}_7C_2 + {}_7C_5}{2^7}$	$\frac{{}_7C_1 + {}_7C_6}{2^7}$	$\frac{{}_7C_0 + {}_7C_7}{2^7}$	1

よって, 期待値は

$$\frac{1}{2^7} \times \{1 \times ({}_7C_3 + {}_7C_4) + 3 \times ({}_7C_2 + {}_7C_5) + 5 \times ({}_7C_1 + {}_7C_6) + 7 \times ({}_7C_0 + {}_7C_7)\} = \frac{35}{16}$$

(3) 余事象で考える.

[1] 2回目の移動で初めて原点にいるとき

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

[2] 4回目の移動で初めて原点にいるとき

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

[3] 6回目の移動で初めて原点にいるとき

$$2 \times \frac{2}{2^6} = \frac{1}{16}$$

$$[1] \sim [3] \text{ から } 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

$$(1) \quad \alpha^7 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1 \text{ であるから } \alpha^7 - 1 = 0$$

$$\alpha^7 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$$

$$\alpha \neq 1 \text{ であるから } \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = -1$$

$$(2) \quad (\text{与式}) = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7} = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1$$

$$(3) \quad (\text{与式}) = \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^6} \right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5} \right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} \right)$$

$$\text{ここで, (2) と同様に } \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5} = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} = 1,$$

$$\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} = \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\alpha^3-1} = 1$$

$$\text{ゆえに } (\text{与式}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (\text{与式}) &= \left(-\alpha - 1 + \frac{1}{1-\alpha} \right) + \left(-\alpha^2 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^2} \right) + \left(-\alpha^3 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^3} \right) \\ &\quad + \left(-\alpha^4 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^4} \right) + \left(-\alpha^5 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^5} \right) + \left(-\alpha^6 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^6} \right) \\ &= -6 - (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6) + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} \\ &\quad + \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6} \\ &= -6 - (-1) + 3 = -2 \end{aligned}$$

$f(x) = x \sin x$ から $f'(x) = \sin x + x \cos x$

ゆえに $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ よって、点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ における

$y = f(x)$ の法線の方程式は $y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$

すなわち $y = \pi - x$

したがって、求める体積を V とすると

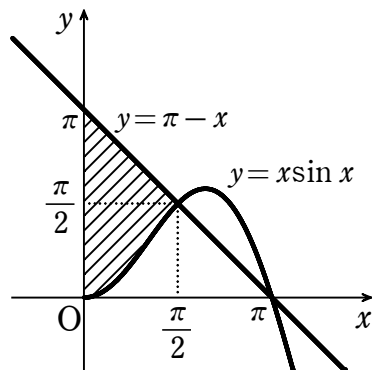
$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot \pi^2 \cdot \pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right\} - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x \, dx$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{1}{2} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{1}{2} \pi \left[x^2 \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - 2x \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} \cos 2x \right) + 2 \left(\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7}{24} \pi^4 - \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{24} \pi^3 + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{13}{48} \pi^4 - \frac{1}{8} \pi^2$$



$(n-2)$ 勝 1 敗のチームを a, b とする.

a と b との対戦で a が勝つとする. a は 1 敗するから, その相手を c とする. また, b は c に勝つ.

a, b, c の選び方は ${}_nP_3$ 通りある.

a が b に勝ち, b が c に勝ち, c が a に勝つ確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ である.

また, a, b が残りの $(n-3)$ チームに勝ち, c が残りの $(n-3)$ チームのうち少なくとも

1 チームに負ける確率は $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}^2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}$ である.

ゆえに, 求める確率は

$${}_nP_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}^2 \left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} = \frac{n(n-1)(n-2)(2^{n-3}-1)}{2^{3n-6}}$$