1

解説

(1)　1 ラジアンとは，

　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ（ア ②）

である。

(2)　144° を弧度法で表すと　$\dfrac{144}{180}\pi = \dfrac{{}^{イ}4}{{}^{ウ}5}\pi$

$\dfrac{23}{12}\pi$ ラジアン を度数法で表すと　$\dfrac{23}{12}\times 180^\circ = {}^{エオカ}345^\circ$

(3)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$ ……① について，$x=\theta+\dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{\pi}{30}\right)=1$　すなわち　$2\sin x-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{{}^{キ}6}\right)=1$

加法定理により　$(\text{左辺})=2\sin x-2\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x=\sin x-\sqrt{3}\cos x$

よって，① は　$\sin x-\sqrt{{}^{ク}3}\cos x=1$

さらに，左辺について，三角関数の合成を用いると　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$

すなわち　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{{}^{ケ}3}\right)=\dfrac{1}{{}^{コ}2}$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\left(\theta+\dfrac{\pi}{5}\right)-\dfrac{\pi}{3}=\theta-\dfrac{2}{15}\pi$ であるから　$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ より　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\theta-\dfrac{2}{15}\pi\leqq\pi-\dfrac{2}{15}\pi$

この範囲において，$\sin\left(\theta-\dfrac{2}{15}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$ を満たすのは　$\theta-\dfrac{2}{15}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{{}^{サシ}29}{{}^{スセ}30}\pi$

$\boxed{2}$

(解説)

$x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ …… ① について，$\log_3 x$ の真数 x は正である。

これと $c>0$ より，① の両辺は正である。

$3\,(>1)$ を底とする ① の両辺の対数をとると　　$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3\left(\dfrac{x}{c}\right)^3$

すなわち　　$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$

$t=\log_3 x$ とおき，変形すると　　$t^{{}^{ア}2} - {}^{イ}3t + 3\log_3 c \geqq 0$ …… ②

(前半)　$c=\sqrt[3]{9}$ のとき　　$3\log_3 c = 3\log_3 \sqrt[3]{9} = 3\log_3 3^{\frac{2}{3}} = 3\cdot\dfrac{2}{3} = 2$

よって，② は　　$t^2-3t+2 \geqq 0$

$(t-1)(t-2) \geqq 0$

ゆえに　　$t \leqq {}^{ウ}1$，$t \geqq {}^{エ}2$

すなわち　　$\log_3 x \leqq 1$，$\log_3 x \geqq 2$

これと $x>0$ から　　${}^{オ}0 < x \leqq {}^{カ}3$，$x \geqq {}^{キ}9$

(後半)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は

実数全体（^{ク} ②）である。

よって，① が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲は，

② がすべての実数 t でつねに成り立つ c の値の範囲

と一致する。

2 次方程式 $t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3\log_3 c \leqq 0$

よって　　$\log_3 c \geqq \dfrac{{}^{ケ}3}{{}^{コ}4}$　　ゆえに　　$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}$　すなわち　$c \geqq \sqrt[{}^{サ}4]{{}^{シス}27}$

3

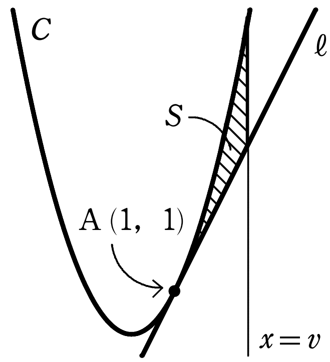
(解説)

(1)　$y=px^2+qx+r$ から　　$y'=2px+q$

接線 ℓ の傾きは ${}^{ア}2$ であるから　　$2p\cdot1+q=2$　　　　よって　　$q={}^{イウ}-2p+{}^{エ}2$

また，C が点 A (1，1) を通ることから　　$1=p\cdot1^2+q\cdot1+r$

よって　　$r=-p-q+1=-p-(-2p+2)+1=p-{}^{オ}1$



(2)　$S=\int_1^v\{(px^2+qx+r)-(2x-1)\}dx$

$=\int_1^v[\{px^2+(-2p+2)x+(p-1)\}-2x+1]dx$

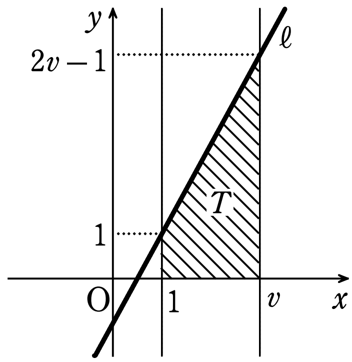
$=\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=p\left[\dfrac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^v$

$=\dfrac{p}{{}^{カ}3}(v^3-{}^{キ}3v^2+{}^{ク}3v-{}^{ケ}1)$

別解　(S の計算)

$$S=\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=\int_1^v p(x-1)^2dx=p\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^v=\frac{p}{3}(v-1)^3$$

$$=\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)$$



また　　$T=\dfrac{1}{2}(v-1)\{1+(2v-1)\}$

$=v^{{}^{コ}2}-v$

よって　　$U=S-T=\dfrac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)$

$=\dfrac{p}{3}v^3-(p+1)v^2+(p+1)v-\dfrac{p}{3}$

$U=g(v)$ とおくと　　$g'(v)=pv^2-2(p+1)v+p+1$

$g(v)$ は $v=2$ で極値をとるから　　$g'(2)=0$

よって　　$p\cdot2^2-2(p+1)\cdot2+p+1=0$　　　　ゆえに　　$p={}^{サ}3$

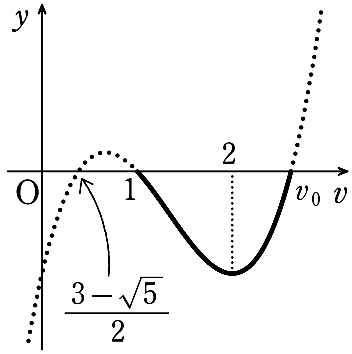
よって　　$g(v)=v^3-4v^2+4v-1$

$=(v-1)(v^2-3v+1)$

$g(v)=0$ とすると　　$v=1,\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$v_0>1$ より　　$v_0=\dfrac{^{シ}3+\sqrt{^{ス}5}}{^{セ}2}$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}(=v_0)$ であるから，$1<v<v_0$ における $y=g(v)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。



ゆえに，$1<v<v_0$ の範囲で U は，負の値のみをとる（ソ ③）。

また，$v>1$ における U の最小値は　　$g(2)=(2-1)(2^2-3\cdot2+1)=^{タチ}-1$

参考　$p=3$ のとき，$g(v)$ の増減表をかくと，確かに $v=2$ で極値をとることがわかる。

4

解説

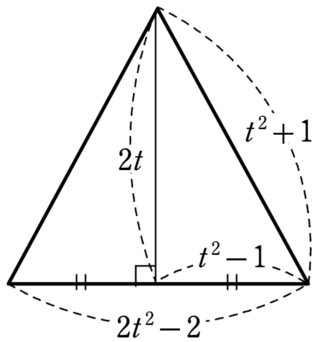
$f(x)$ とその不定積分 $F(x)$ について　　$F'(x)=f(x)$（ア ⑦）

$f(x)$ について，$x\geqq1$ の範囲でつねに $f(x)\leqq0$ であるから，$t>1$ のとき

$$W=\int_1^t\{-f(x)\}dx$$
$$=-\int_1^t f(x)dx=-\int_1^t F'(x)dx$$
$$=-\Big[F(x)\Big]_1^t=-F(t)+F(1)\qquad(^{イ}\ ④)$$

一方，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形について，高さは

$$\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=\sqrt{4t^2}=2t$$



よって，その面積は　　$\dfrac{1}{2}(2t^2-2)\cdot2t=2t^3-2t$

ゆえに　　$W=2t^3-2t$

よって　　$-F(t)+F(1)=2t^3-2t$

すなわち　$F(t)=-2t^3+2t+F(1)$

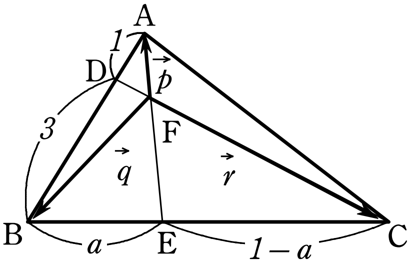
両辺を t で微分すると　　$F'(t)=-6t^2+2$

したがって　　$f(t)=^{ウエ}-6t^{^{オ}2}+^{カ}2$

よって，$x>1$ において　　$f(x)=-6x^2+2$

$\boxed{5}$

(解説)



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{FB}}-\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\vec{q}-\vec{p}$　（ア ②）

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{q}-\vec{p}|^2$

$=|\vec{p}|^2-{}^{\text{イ}}2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$　……①

(2)　点 D は辺 AB を 1：3 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{FB}}}{1+3}=\frac{{}^{\text{ウ}}3}{{}^{\text{エ}}4}\vec{p}+\frac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}4}\vec{q}\quad\cdots\cdots②$$

(3)　s，t をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{FD}}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ を満たす実数とする。

② により　$\frac{3}{4}\vec{p}+\frac{1}{4}\vec{q}=s\vec{r}$

よって　$\vec{q}={}^{\text{キク}}-3\vec{p}+{}^{\text{ケ}}4s\vec{r}$　……③

点 E は辺 BC を $a：(1-a)$ に内分するから　$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=(1-a)\vec{q}+a\vec{r}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=t\vec{p}$ であるから　$(1-a)\vec{q}+a\vec{r}=t\vec{p}$

よって　$\vec{q}=\frac{t}{{}^{\text{コ}}1-{}^{\text{サ}}a}\vec{p}-\frac{{}^{\text{シ}}a}{1-a}\vec{r}$　……④

$\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{r}\neq\vec{0}$，$\vec{p}\not\parallel\vec{r}$ であるから，③，④ より

$$-3=\frac{t}{1-a},\quad 4s=-\frac{a}{1-a}$$

したがって　$s=\frac{{}^{\text{スセ}}-a}{{}^{\text{ソ}}4(1-a)}$，$t={}^{\text{タチ}}-3(1-a)$

(4)　$|\vec{p}|=1$ のとき，① により　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

また　$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{FE}}-\overrightarrow{\mathrm{FB}}=t\vec{p}-\vec{q}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|t\vec{p}-\vec{q}|^2$

$=t^2|\vec{p}|^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

$=t^2-2t\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$

$t=-3(1-a)$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2={}^{\text{ツ}}9(1-a)^2+{}^{\text{テ}}6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$ より

$$1-2\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=9(1-a)^2+6(1-a)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$$

整理すると　$2(3a-4)\vec{p}\cdot\vec{q}=(3a-2)(3a-4)$

$0<a<1$ より，$3a-4\neq0$ であるから　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{{}^{\text{トナ}}3a-{}^{\text{ニ}}2}{{}^{\text{ヌ}}2}$

$\boxed{6}$

(解説)

(1)　箱から1枚のカードを無作為に取り出すとき，$X=2a$ となる確率は　$\dfrac{^{ア}1}{^{イ}a}$

$a=5$ のとき，確率変数 X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	4	6	8	10	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}$$
$$=(2+4+6+8+10)\cdot\frac{1}{5}={}^{ウ}6$$

分散 $V(X)$ は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}-6^2$$
$$=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot\frac{1}{5}-36$$
$$=44-36={}^{エ}8$$

したがって　$E(sX+t)=sE(X)+t=6s+t$

$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2$

$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より　$6s+t=20$，$8s^2=32$

$s>0$ であるから　$s={}^{オ}2$，$t={}^{カ}8$

このとき，$2X+8\geqq 20$ を解くと　$X\geqq 6$

よって，$2X+8$ が20以上である確率は

$$P(6\leqq X\leqq 10)=P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0.{}^{キ}6$$

(2)　取り出す3枚のカードをどのように選んでも，それらを横1列に並べる $3!=6$ 通りの並べ方のうち，数字が左から小さい順に並んでいる並べ方は1通りしかない。

よって，事象 A の起こる確率は　$\dfrac{^{ク}1}{^{ケ}6}$

事象 A が，ちょうど n 回起こる確率は，${}_{180}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^{180-n}$ であるから，確率変数 Y は，二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，Y の平均 m は　$m=180\cdot\dfrac{1}{6}=^{コサ}30$

分散 σ^2 は　$\sigma^2=180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=^{シス}25$

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う。

ここで，$Z=\dfrac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって
$$\begin{aligned}P(18\leqq Y\leqq 36)&=P(-^{セ}2.^{ソタ}40\leqq Z\leqq ^{チ}1.^{ツテ}20)\\&=p(2.40)+p(1.20)\\&=0.4918+0.3849\\&=0.8767\end{aligned}$$

したがって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=0.^{トナ}88$

(3)　400 人の有権者のうち，320 人が賛成であったから，標本比率 R は

$$R=\frac{320}{400}=\frac{4}{5}=0.^{ニ}8$$

また，標本の大きさは，$n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=0.02$$

したがって，p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$[0.8-1.96\cdot0.02,\ 0.8+1.96\cdot0.02]$$

すなわち　$[0.7608,\ 0.8392]$

よって　$0.^{ヌネ}76\leqq p\leqq 0.^{ノハ}84$

標本の大きさ n，標本比率 R の p に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅は，n が大きいとき　$2\times1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

よって
$$L_1=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{400}}$$
$$L_2=3.92\sqrt{\frac{0.6\times(1-0.6)}{400}}=3.92\sqrt{\frac{0.24}{400}}$$
$$L_3=3.92\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{500}}=3.92\sqrt{\frac{0.16}{500}}$$

したがって，$L_1<L_2$ かつ $L_3<L_1$ より　$L_3<L_1<L_2$　（^{ヒ}④）