

1

$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta$ とする。 $0^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。

2

$\alpha > 0$ とし、 $x > 0$ で定義された関数 $f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x}$ を考える。

$y = f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α で表せ。ただし、 e は自然対数の底である。

3

A, B 2人がそれぞれ1個のサイコロを投げるという試行に基づいて、数直線上の点 P を移動させる。A と B のサイコロの目の小さい方の値を M とする。ただし、2つのサイコロの目が等しい場合には、その等しい値を M とする。A のサイコロの目の値と M の値がともに偶数であるとき、点 P を正の方向に1だけ進め、これらがともに奇数であるとき、点 P を負の方向に1だけ進める。また、これらの一方が偶数であり、他方が奇数であるときには、点 P は移動させない。最初、点 P は原点にあるとする。

- (1) 1回の試行において、A のサイコロの目の値と M の値がともに偶数である確率、および、ともに奇数である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) このような試行を2回繰り返した後の点 P の座標を X とする。 X の確率分布を求めよ。
- (3) X の平均と分散を求めよ。

4

自然数 n と実数 t に対して、

$$I = \int_0^\pi (\sin x - t \cos 2nx)^2 dx$$

とおく。

- (1) I を n と t を用いて表せ。
- (2) I を t の関数と考える。 I が最小になる t の値を n を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた t の値を t_n とおく。このとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ の和を求めよ。