添削課題５月６日(水)

1 [2025 神戸大]

媒介変数 θ を用いて

$$x=\sin\theta,\quad y=\cos\theta+|\sin\theta| \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

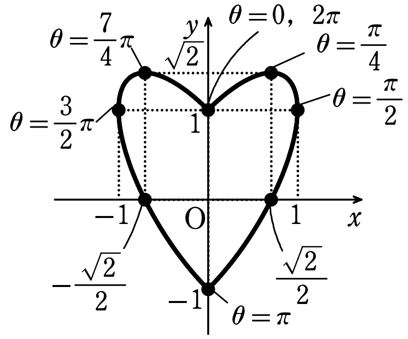
で表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答 (1) 〔図〕

(2) π



解説

(1) $x(\theta)=\sin\theta$, $y(\theta)=\cos\theta+|\sin\theta|$ とおくと

$$x(2\pi-\theta)=\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta=-x(\theta)$$

$$y(2\pi-\theta)=\cos(2\pi-\theta)+|\sin(2\pi-\theta)|=\cos\theta+|\sin\theta|=y(\theta)$$

よって，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と，$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は y 軸に関して対称である。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のときを考える。

$x=\sin\theta$ より $\quad \dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\quad \theta=\dfrac{\pi}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\quad y=\cos\theta+\sin\theta$

よって $\quad \dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta+\cos\theta=-\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

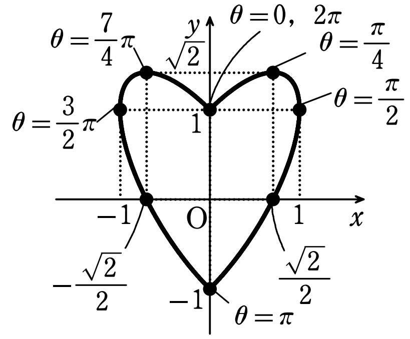
$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より $\quad \theta-\dfrac{\pi}{4}=0$

すなわち $\quad \theta=\dfrac{\pi}{4}$

したがって，θ の値に対応する x，y の値の変化は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	／	$+$	$+$	$+$	0	$-$	／
$\frac{dy}{d\theta}$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$	／
$(x,\ y)$	$(0,\ 1)$	↗	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$	↘	$(1,\ 1)$	↙	$(0,\ -1)$

y 軸に関して対称なことと合わせると，曲線 C の概形は次のようになる。



(2) 曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を表す関数を y_1，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を表す関数を y_2 とし，求める面積を S とすると，y 軸に関する対称性から

$$\begin{aligned}
S&=2\left(\int_0^1 y_1\,dx-\int_0^1 y_2\,dx\right)\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta-2\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\cdot\frac{dx}{d\theta}\cdot d\theta\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta\\
&=2\int_0^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}(2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta\\
&=\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta+\sin 2\theta)\,d\theta=\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi}=\pi
\end{aligned}$$

2 [2025 大阪大]

p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

(1) $f(\alpha)-f(\beta)$ を p と m を用いて表せ。

(2) p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。

解答 (1) $f(\alpha)-f(\beta)=4(\sqrt{p^2-m})^3$ (2) 曲線 $y=x^3-3x$

解説

(1) $f'(x)=3x^2+6px+3m=3(x^2+2px+m)$

よって，$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，2 次方程式 $f'(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ をもつ。

よって，$\dfrac{1}{3}f'(x)=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=p^2-m>0$ ……(A)

このとき $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

したがって $f(\alpha)-f(\beta)=\displaystyle\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-3\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

ここで，α，β $(\alpha<\beta)$ は，$f'(x)=0$ すなわち $x^2+2px+m=0$ の解であるから

$$\alpha=-p-\sqrt{p^2-m},\quad \beta=-p+\sqrt{p^2-m}$$

よって $\beta-\alpha=2\sqrt{p^2-m}$

したがって $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{1}{2}\cdot(2\sqrt{p^2-m})^3=4(\sqrt{p^2-m})^3$

別解 $f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^3+3p\alpha^2+3m\alpha)-(\beta^3+3p\beta^2+3m\beta)$

$$=(\alpha^3-\beta^3)+3p(\alpha^2-\beta^2)+3m(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)+3p(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+3m(\alpha-\beta)$$

$$=(\alpha-\beta)\{(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta+3p(\alpha+\beta)+3m\}$$

α，β は，$x^2+2px+m=0$ の解であるから $\alpha-\beta=-2\sqrt{p^2-m}$

また，解と係数の関係により $\alpha+\beta=-2p$，$\alpha\beta=m$

よって $f(\alpha)-f(\beta)=-2\sqrt{p^2-m}\{(-2\sqrt{p^2-m})^2+3m-6p^2+3m\}$

$$=-2\sqrt{p^2-m}\{-2(p^2-m)\}=4(p^2-m)\sqrt{p^2-m}$$

$$=4(\sqrt{p^2-m})^3$$

(2) $f''(x)=6x+6p=6(x+p)$

$f''(x)$ は $x=-p$ の前後で符号が変化するから，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，$f(-p)=2p^3-3mp$ であるから $\begin{cases} X=-p & \cdots\cdots ① \\ Y=2p^3-3mp & \cdots\cdots ② \end{cases}$

また，(1) より $f(\alpha)-f(\beta)=4$ のとき $4(\sqrt{p^2-m})^3=4$

$\sqrt{p^2-m}$ は実数であるから $\sqrt{p^2-m}=1$

すなわち $p^2-m=1$

これは (A) を満たす。

よって $m=p^2-1$

これを ② に代入すると $Y=2p^3-3p(p^2-1)=-p^3+3p$

① より，$p=-X$ であるから $Y=-(-X)^3+3\cdot(-X)=X^3-3X$

ここで，p はすべての実数をとりうるから，① より X もすべての実数をとりうる。

ゆえに，求める軌跡は 曲線 $y=x^3-3x$

添削課題５月６日(水)

$\boxed{1}$［2025 神戸大］

媒介変数 θ を用いて

$$x=\sin\theta,\quad y=\cos\theta+|\sin\theta|\quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ [2025 大阪大]

p と m を実数とし，関数 $f(x)=x^3+3px^2+3mx$ は $x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

(1) $f(\alpha)-f(\beta)$ を p と m を用いて表せ。

(2) p と m が $f(\alpha)-f(\beta)=4$ を満たしながら動くとき，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の軌跡を求めよ。