$\boxed{1}$

(解説)

$f(\theta)=(2\cos^2 2\theta-1)-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\quad=2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 135^\circ$ から　$0^\circ \leqq 2\theta \leqq 270^\circ$

よって，$\cos 2\theta=t$ とおくと　$-1\leqq t\leqq 1$

また　$f(\theta)=2t^2+2t-3=2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}$

ゆえに，$f(\theta)$ は

$t=1$ のとき最大値 1，

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$　をとる．

$t=1$ から　$2\theta=0^\circ$　　よって　$\theta=0^\circ$

$t=-\dfrac{1}{2}$ から　$2\theta=120^\circ$，$240^\circ$　　よって　$\theta=60^\circ$，$120^\circ$

したがって　$\theta=0^\circ$ のとき最大値 1，

$\theta=60^\circ$，$120^\circ$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$

$\boxed{2}$

(解説)

$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^\alpha}-1\right)\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{(e-x^\alpha)\log x}{x^{\alpha+1}}$

$\alpha>0$，$x>0$ であるから，$f(x)=0$ とすると　$x=1$，$e^{\frac{1}{\alpha}}$

このとき　$1<e^{\frac{1}{\alpha}}$

また，$0<x<1$ のとき　　$f(x)<0$

$1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ のとき　$f(x)\geqq 0$

$e^{\frac{1}{\alpha}}<x$ のとき　　$f(x)<0$

よって，求める面積 $S$ は　$S=\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^\alpha}-1\right)\frac{\log x}{x}dx$

$\log x=t$ とおくと　$x=e^t$，$\dfrac{1}{x}dx=dt$

| $x$ | $1\longrightarrow e^{\frac{1}{\alpha}}$ |
|---|---|
| $t$ | $0\longrightarrow \dfrac{1}{\alpha}$ |

よって　$S=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(e^{1-\alpha t}-1)tdt$

$$=\left[\left(-\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha t}-t\right)t\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}e^{1-\alpha t}+t\right)dt$$

$$=\left(-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\alpha}+\left[-\frac{1}{\alpha^2}e^{1-\alpha t}+\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=-\frac{2}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{2\alpha^2}+\frac{e}{\alpha^2}=\frac{2e-5}{2\alpha^2}$$

## 3

解説

(1)　1 回の試行で A，B のサイコロの目をそれぞれ $a$，$b$ とする．

$a$，$M$ がともに偶数であるような A，B のサイコロの目の出方は

$a=2$ のとき　$b=2$，3，4，5，6　の 5 通り

$a=4$ のとき　$b=2$，4，5，6　の 4 通り

$a=6$ のとき　$b=2$，4，6　の 3 通り

ゆえに，$a$，$M$ がともに偶数である確率は　$\dfrac{5+4+3}{6^2}=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

$a$，$M$ がともに奇数であるような A，B のサイコロの目の出方は

$a=1$ のとき　$b=1$，2，3，4，5，6　の 6 通り

$a=3$ のとき　$b=1$，3，4，5，6　の 5 通り

$a=5$ のとき　$b=1$，3，5，6　の 4 通り

ゆえに，$a$，$M$ がともに奇数である確率は　$\dfrac{6+5+4}{6^2}=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

(2)　1 回の試行で点 P を正，負の方向に 1 だけ進める確率は，それぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{12}$ である．

ゆえに，点 P を移動させない確率は　$1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

また，$X$ のとりうる値は　$X=-2$，$-1$，0，1，2

よって　$P(X=-2)=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2=\dfrac{25}{144}$，$P(X=-1)={}_2\mathrm{C}_1\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{24}$，

$P(X=0)={}_2\mathrm{C}_1\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{12}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{49}{144}$，$P(X=1)={}_2\mathrm{C}_1\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

したがって，$X$の確率分布は

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{25}{144}$ | $\frac{5}{24}$ | $\frac{49}{144}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

(3)　$E(X)=\dfrac{1}{144}(-2\cdot25-1\cdot30+0\cdot49+1\cdot24+2\cdot16)=-\dfrac{24}{144}=-\dfrac{1}{6}$

また　$E(X^2)=\dfrac{1}{144}(4\cdot25+1\cdot30+0\cdot49+1\cdot24+4\cdot16)=\dfrac{218}{144}=\dfrac{109}{72}$

ゆえに　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{109}{72}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{107}{72}$

$\boxed{4}$

(解説)

(1)　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}(\sin x-t\cos 2nx)^2dx$

$$=\int_0^{\pi}(\sin^2 x-2t\sin x\cos 2nx+t^2\cos^2 2nx)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-2t\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\}dx+t^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4nx}{2}dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$

$$=\frac{1}{2}\{(\pi-0)-(0-0)\}$$

$$=\frac{1}{2}\pi$$

$$2t\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\}dx$$

$$=t\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=t\left\{\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)-\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)\right\}$$

$$=t\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$=2t\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{-4t}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$t^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4nx}{2}dx=\frac{t^2}{2}\left[x+\frac{1}{4n}\sin 4nx\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{t^2}{2}\{(\pi+0)-(0+0)\}$$

$$=\frac{1}{2}\pi t^2$$

よって

$$I=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-2t\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\}dx+t^2\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 4nx}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\pi t^2+\frac{4}{(2n+1)(2n-1)}t+\frac{1}{2}\pi$$

(2)　$I$ を $t$ の関数と考えると，$I$ は下に凸な 2 次関数であるから，$I$ が最小になる $t$ の値は 2 次関数のグラフの頂点の $t$ 座標である。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の頂点の $x$ 座標は $-\frac{b}{2a}$ と表すことができるので，この 2 次関数の頂点の $t$ 座標は

$$t=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\pi}\left\{\frac{4}{(2n+1)(2n-1)}\right\}$$

$$=-\frac{4}{\pi(2n+1)(2n-1)}$$

(3)　$$\sum_{k=1}^{n}t_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{4}{\pi(2k+1)(2k-1)}\right\}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって　$$\sum_{n=1}^{\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_k=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}=-\frac{2}{\pi}$$