$\boxed{1}$

(解説)

(1)　2 つの共有点の x 座標は，方程式 $3x^2=2x^2+a^2$ の解である。

よって，$(x+a)(x-a)=0$ から　　$x=\pm a$

$a>0$ であるから，B の x 座標は a である。

したがって，B の座標は $\left({}^{\text{ア}}a,\ {}^{\text{イ}}3a^{{}^{\text{ウ}}2}\right)$ である。

放物線 C_1 に関して，$y=3x^2$ から　　$y'=6x$

接点の座標は $(s,\ 3s^2)$ であるから，ℓ の方程式は　　$y-3s^2=6s(x-s)$

すなわち　　$y={}^{\text{エ}}6sx-{}^{\text{オ}}3s^{{}^{\text{カ}}2}$

放物線 C_2 に関して，$y=2x^2+a^2$ から　　$y'=4x$

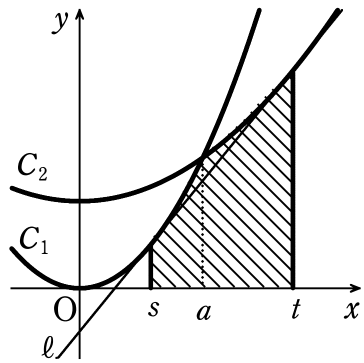
接点の座標は $(t,\ 2t^2+a^2)$ であるから，ℓ の方程式は　　$y-(2t^2+a^2)=4t(x-t)$

すなわち　　$y={}^{\text{キ}}4tx-{}^{\text{ク}}2t^2+a^2$

これらは一致するから　　$\begin{cases} 6s=4t \\ -3s^2=-2t^2+a^2 \end{cases}$

$s>0$，$t>0$，$a>0$であるから　　$s=\dfrac{\sqrt{{}^{\text{ケ}}6}}{{}^{\text{コ}}3}a$，$t=\dfrac{\sqrt{6}}{{}^{\text{サ}}2}a$

放物線 C_1 の $s\leqq x\leqq a$ の部分，放物線 C_2 の $a\leqq x\leqq t$ の部分，x 軸，および 2 直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた図形の面積は



$$\int_s^a 3x^2dx+\int_a^t(2x^2+a^2)dx$$

$$=\Big[x^3\Big]_s^a+\left[\frac{2}{3}x^3+a^2x\right]_a^t$$

$$=(a^3-s^3)+\left\{\left(\frac{2}{3}t^3+a^2t\right)-\left(\frac{2}{3}a^3+a^3\right)\right\}$$

$$=-s^3+\frac{2}{3}t^3+a^2t-\frac{2}{3}a^3$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3+a^2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)-\frac{2}{3}a^3=\frac{{}^{\text{シ}}7\sqrt{{}^{\text{ス}}6}-{}^{\text{セ}}6}{{}^{\text{ソ}}9}a^{{}^{\text{タ}}3}$$

(2)　$f'(x)=3x^2+2px+q$ であり，$f'(-4)=0$ となるから　　$3(-4)^2+2p(-4)+q=0$

整理して　　$-8p+q+48=0$

また，点 A の座標は $(-a,\ 3a^2)$ であり，曲線 $y=f(x)$ は点 A，B および原点を通る

から　　$\begin{cases}(-a)^3+p(-a)^2+q(-a)+r=3a^2\\ a^3+pa^2+qa+r=3a^2\\ 0^3+p\cdot 0^2+q\cdot 0+r=0\end{cases}$

これらを解いて　　$p=^{チ}3$，$q=^{ツテト}-24$，$r=^{ナ}0$

このとき　　$f(x)=x^3+3x^2-24x$

$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x^2+2x-8)=3(x-2)(x+4)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2,\ -4$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小 -28	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=2$ で極小値 $^{ニヌネ}-28$ をとる。

また，曲線 $y=f(x)$ は点 $\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$ を通るから

$$3a^2=a^3+3a^2-24a$$

すなわち　　$a(a^2-24)=0$　　　ゆえに　　$a=0,\ \pm 2\sqrt{6}$

$a>0$ であるから　　$a=^{ノ}2\sqrt{^{ハ}6}$

このとき，放物線 C_2 の方程式は　　$y=2x^2+24$

曲線 $y=f(x)$ と放物線 C_2 の共有点の x 座標は，方程式 $x^3+3x^2-24x=2x^2+24$ を解いて　　$x=-1,\ \pm 2\sqrt{6}$

A，B と異なる点の x 座標は -1 である。　この点の y 座標は　　$2(-1)^2+24=26$

よって，A，B と異なる共有点の座標は　　$(^{ヒフ}-1,\ ^{ヘホ}26)$

$\boxed{2}$

(解説)

(1) $P(X<50)=P\left(Z<\dfrac{50-50.2}{0.4}\right)=P(Z<-{}^{ア}0.{}^{イ}5)=P(Z>0.5)$

$$=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.5)=0.5-0.1915\fallingdotseq 0.{}^{ウエ}31$$

(2) $P\left(Z<-\boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)=P\left(Z>\boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)$

$$=P(Z\geqq 0)-P\left(0\leqq Z\leqq \boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)$$

$$=0.5-P\left(0\leqq Z\leqq \boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)$$

$P\left(Z<-\boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)=0.0401$ であるとき，

$P\left(0\leqq Z\leqq \boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)=0.5-P\left(Z<-\boxed{オ}.\boxed{カキ}\right)=0.5-0.0401=0.4599$

となるから，正規分布表により，${}^{オ}1.{}^{カキ}75$ となる。

また，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ であり，標準偏差 σ が 0.4 のとき，製造される菓子 1 個あたりの重さが 50 g 未満となるとき　$\dfrac{X-m}{\sigma}<\dfrac{50-m}{0.4}$

よって，$\dfrac{50-m}{0.4}=-1.75$ であるから　　$m={}^{クケ}50.{}^{コ}7$

(3) $Y=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_9+80$ であるから

$$\overline{Y}=9\overline{X}+80=9\cdot 50.2+80={}^{サシス}531.{}^{セ}8$$

また，$V(Y)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots\cdots+V(X_9)=9\times 0.4^2$ であるから

$$\sigma(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{9\times 0.4^2}=3\times 0.4={}^{ソ}1.{}^{タ}2$$

$\overline{X}$ の標準偏差は　$\dfrac{0.4}{\sqrt{9}}=\dfrac{0.4}{{}^{チ}3}$

よって　$P(\overline{X}<50)=P\left(Z<\dfrac{50-50.2}{\dfrac{0.4}{3}}\right)=P(Z<-1.5)=P(Z>1.5)$

$$=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 1.5)=0.5-0.4332\fallingdotseq 0.{}^{ツテ}07$$

(4) m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[50.10-1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}},\ 50.10+1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right]$$

すなわち，$50.0608\leqq m\leqq 50.1392$ であるから　$50.{}^{トナ}06\leqq m\leqq 50.{}^{ニヌ}14$

このときの信頼区間の幅は

$$\left(50.10+1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right)-\left(50.10-1.96\cdot\frac{0.2}{\sqrt{100}}\right)=1.96\cdot\frac{0.4}{\sqrt{100}}$$

信頼度と標準偏差が変わらないものとして，標本の大きさが n であるときの信頼区間

の幅は同様に $1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}$ であるから，$1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}\cdot 1.96\cdot\dfrac{0.4}{\sqrt{100}}$ より

$$n=400\ (^{ネ}⑤)$$

$\boxed{3}$

（解説）

条件から　$a+(a+1)+\cdots\cdots+b=500$

ここで　$b=a+k$ とおくと

$$a+(a+1)+\cdots\cdots+(a+k)=(k+1)a+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}(k+1)(k+2a)$$

であるから　$(k+1)(k+2a)=2^3\cdot 5^3$

また　$k+1<k+2a$　かつ　$32\cdot 33=1056>1000$ であるから　$k+1<32$

更に，$k+1$ と $k+2a$ は，同時に奇数または偶数になることはない.

以上から

[1]　$k+1=5$　　[2]　$k+1=8$　　[3]　$k+1=25$

の 3 通りについて調べればよい.

[1]　$k+1=5$ のとき　$k=4$　このとき　$2a+4=2^3\cdot 5^2$

よって　$a=98$，$b=102$

[2]　$k+1=8$ のとき　$k=7$　このとき　$2a+7=5^3$

よって　$a=59$，$b=66$

[3]　$k+1=25$ のとき　$k=24$　このとき　$2a+24=2^3\cdot 5$

よって　$a=8$，$b=32$

以上により，$(a,\ b)$ の組は $(8,\ 32)$，$(59,\ 66)$，$(98,\ 102)$